

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL' ACCADEMIA
DELLE
SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXV. — (Anno XCVII)

gennaio · dicembre 1958



NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 322-568
1958

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

· RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXV. — (Anno XCVII)

gennaio - dicembre 1958



NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 322-568
1958



Digitized by the Internet Archive
in 2024

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1957

letta nell' adunanza plenaria del dì 26 gennaio 1958

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Il rapporto, che ogni anno espongo ai Colleghi, in questa seduta plenaria della nostra Società, sui lavori dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche, sarà questa volta — ne sono certo — più scarno e più dimesso del solito, perchè, nel ripensare alle vicende del 1957, appariranno, più che mai vive nel ricordo e nel rimpianto, altre care figure scomparse, ed un profondo ed invincibile senso di mestizia non potrà non velare il mio dire.

Ma cercherò di adempiere il dovere che m' incombe, riassumendo con fedele e ordinata obiettività quanto di notevole si verificò nell' anno testè decorso, ed esponendo anzitutto, come di consueto, l' attività scientifica del Sodalizio, documentata dalle note e memorie presentate dai soci e dagli estranei.

Iniziando questa rassegna dai lavori di matematica pura, mi piace segnalare in primo luogo il consocio Nicolò Spampinato, alla cui continuata attività sono dovute ben sei note, che in parte rappresentano la prosecuzione di precedenti ricerche, ugualmente pubblicate nel nostro Rendiconto, e in parte si riferiscono ad argomenti nuovi nel campo della geometria. La prima di esse, dal titolo *La V_8 di S_{11} determinata dalle coniche osculatrici ad una superficie algebrica di S_3 prolungata nel campo tripotenziale*, studia la rappresentazione complessa nell' S_{11} complesso di una superficie algebrica dell' S_3 complesso prolungata nel campo tripotenziale. La seconda esamina la *Rappresentazione in S_{11} delle reti di sezioni piane di una superficie completa e delle relative curve jacobiane*, introducendo il concetto di superficie semiriducibile. Altre due, che hanno per argomento la *prima curva osculatrice di un ramo superlineare di una curva algebrica piana completa*, precisano il comportamento effettivo delle popari nei punti multipli della curva data, mettendo in evidenza l' interesse particolare che ha lo studio di tale tipo di curve in coordinate omogenee,

determinando l'equazione della $C^{v+v'}$ nel caso che presenta il caso minimo in entrambi i punti origine dei due rami superlineari, ed anche le tangenti alla $C^{v+v'}$ infinitamente vicine alla tangente nel punto origine per ciascuno dei due rami. La quinta nota è destinata allo studio de *La varietà di S_{11} determinata da una superficie algebrica come insieme dei suoi flessi*; e l'ultima, *Sui numeri bicomplessi di Corrado Segre*, pone in rilievo come l'algebra dei numeri bicomplessi abbia avuto origine attraverso ricerche generiche di Corrado Segre sugli enti iperalgebrici, come algebra a quattro unità definita nel corpo reale.

Nello stesso settore di ricerche matematiche si può ricordare un lavoro del dott. Mario Curzio, *Sui gruppi φ -isomorfi ad un gruppo speciale finito*, nel quale si caratterizzano i gruppi risolubili per i quali il reticolo dei sottogruppi di composizione è isomorfo al reticolo dei sottogruppi d'un gruppo speciale finito.

Passando da questi studi teorici ad altri che hanno applicazioni tecniche, come quelli che si riferiscono alla scienza delle costruzioni, si possono citare altre due note. Una, dovuta al prof. Franco Mazzarella, tratta de *Le equazioni di congruenza in coordinate curvilinee*. Con riferimento a coordinate curvilinee ortogonali, l'autore deduce le condizioni di congruenza dell'elasticità lineare, presentando la loro specializzazione con lettura facile anche per chi non conosce il calcolo tensoriale. L'altra, del dott. Renato Spàracio, esamina alcune *Generalizzazioni del teorema di Castigliano* per ricavare l'espressione dello spostamento di un punto in una struttura elastica soggetta a forze e distorsioni, ed il valore di una generica caratteristica della sollecitazione in una struttura elastica soggetta a sole distorsioni.

Ad un particolare campo di indagini geofisiche spetta, invece, una nota del dott. William Mansfield Adams dal titolo *An improved method of determining direction of faulting in earthquakes*, il quale introduce, nelle indagini sismografiche dei terremoti per frattura, un perfezionamento del metodo abituale delle proiezioni, che consente un raddoppiamento fittizio del numero delle stazioni di osservazione, ottenendo così una minore indecisione nel tracciamento delle linee nodali.

Nel settore delle discipline geologiche non sono mancati altri interessanti contributi. Il dott. Virgilio Catalano dà notizia, in un lavoro (*Note geologiche ercolanesi. Materiali piroclastici anteriori all'eruzione del 79 d. C. rinvenuti sotto l'area della Palestra in Ercolano*), dei materiali piroclastici apparsi in un recente scavo effettuato sotto l'antico piano di calpestio della Palestra di Ercolano; e, tenuto conto della presenza intermedia — nella loro successione verticale — di uno spesso strato di terreno vegetale, ritiene di poter scorgere in essi la documentazione di due distinte eruzioni, anteriori a quella dell'anno 79 dell'era cristiana, ponendo in evidenza la necessità di una sistematica ricognizione archeolo-

gica per una possibile datazione delle menzionate eruzioni, nel duplice interesse della geologia e dell'archeologia. Il dott. Renato Sinno continua le ricerche sistematiche, chimiche e petrografiche, con i necessari riferimenti stratigrafici e cronologici, sui vari prodotti dei vulcani flegrei; e alle indagini effettuate negli anni precedenti sulle zone Bagnoli-Pozzuoli e Pozzuoli-Arco Felice, ugualmente pubblicate nel nostro Rendiconto, fa ora seguire uno *Studio geologico e petrografico della zona Via Scalandrone - Punta dell' Epitaffio (Lucrino)*. Di questa plaga flegrea, particolarmente interessante perchè sede di una notevole attività idrotermale, sfruttata fin dai tempi romani, l'autore ha studiato la stratigrafia, la petrografia, le incrostazioni saline e l'alterazione idrotermale dei prodotti piroclastici, corredando il lavoro di numerose analisi chimiche. Il prof. Antonio Lazzari ha presentato un'ampia monografia, che, per la sua mole e per il ricco materiale illustrativo che la correda, è stata dall'Accademia accolta per la inserzione nel volume in corso degli Atti. Benchè non ancora pubblicata, si può fin da ora ricordare che la memoria, la quale ha per titolo *Le prospettive petrolifere dell'Italia meridionale*, affronta un argomento di grande interesse scientifico e di notevole attualità pratica. Vengono infatti riassunte le nostre conoscenze sul complesso problema dei giacimenti degli idrocarburi del Mezzogiorno d'Italia, esaminati dal punto di vista genetico, stratigrafico, tettonico ed industriale, e sono esposte le prospettive petrolifere delle regioni del Sud, giungendo a conclusioni di particolare interesse per il futuro sviluppo delle ricerche.

E' qui opportuno ricordare che un'altra memoria, ugualmente accolta dal Sodalizio per la stampa nel volume degli Atti, è quella del prof. Marcello La Greca, *Morfologia del dermascheletro e segmentazione del capo di Anilocra physodes (L.) (Crustacea, Isopoda)*, che meritò, or è già un anno, il premio accademico per il biennio 1955-1956. Di questo lavoro la Commissione giudicatrice del concorso ebbe già a rilevare l'importanza quale primo studio monografico, moderno e completo, sulla morfologia della regione cefalica di una specie di crostacei, lodandone l'accuratezza delle indagini e delle comparazioni con altre specie di isopodi.

Passati, così, dal campo geologico a quello biologico, ci resta da segnalare ancora un lavoro di fisiologia generale, inserito nel Rendiconto. E' quello del dott. Oscar Goglia, il quale ha studiato, in via preliminare, la ripartizione de *Gli acidi nucleici nel plasma sanguigno di animali di specie diverse*. Dato il notevole interesse che presentano questi acidi, quali costituenti normali ed essenziali di tutte le cellule animali e vegetali, l'autore ha determinato, con metodi idonei, la ripartizione degli acidi ribonucleico e deossiribonucleico nel plasma di parecchi mammiferi e di alcuni uccelli, mettendone in evidenza le diverse concentrazioni, che conducono a valori sensibilmente diversi del rapporto tra RNAP e DNAP.

Se queste sono state le principali manifestazioni di attività dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche nel corso dell'anno 1957 — le quali hanno fornito materia per la pubblicazione di un nuovo volume dei Rendiconti (il XXIV della serie 4^a) e per avviare a compimento un altro volume degli Atti (il III della serie 3^a) — non sono mancate altre dimostrazioni accessorie di operosità, quali, ad esempio, la partecipazione del nostro Sodalizio a varie celebrazioni e congressi, sia direttamente con propri delegati, sia indirettamente mediante messaggi di adesione, e si sono altresì accresciuti i rapporti, già numerosi, con altre associazioni culturali di ogni parte del mondo, stabilendo nuovi cambi di pubblicazioni con Accademie ed Istituti diversi di Napoli, Budapest, Mendoza, Tokio, Praga, Brema, ecc.

Di tutto ciò è data sommaria notizia nei processi verbali delle adunanze, pubblicati nel Rendiconto insieme con il Rapporto annuale del Segretario. La stampa del volume è stata facilitata, come negli anni precedenti, dalla concessione di un particolare contributo, sui fondi che l'Ente Nazionale per la Cellulosa e la Carta riserva alle riviste di elevato valore culturale.

Mi par quasi superfluo accennare in questa relazione — anche perchè il nostro Presidente ne ha testè parlato con esauriente efficacia — che con l'entrata in vigore del nuovo Statuto della Società, votato nell'adunanza plenaria del gennaio dello scorso anno ed approvato con Decreto Presidenziale 30 luglio 1957, n. 866, l'Accademia ha visto accresciute le proprie file, sia per l'aumento dei posti di socio corrispondente, sia per la istituzione di tre posti di socio emerito (con modificate attribuzioni e modalità di nomina): sicchè appare ben fondato l'augurio ch'essa possa presto arricchirsi di nuove e feconde energie.

E', invece, per me particolarmente gradito ricordare che nell'adunanza del 1° giugno scorso l'Accademia ha, a voti unanimi, nominato socio corrispondente nella Sezione di Scienze matematiche il prof. Vincenzo Franciosi, il quale, tanto per la sua qualità di successore, nella cattedra di Scienza delle costruzioni, del nostro inobliato consocio Adriano Galli, quanto per i numerosi contributi scientifici già offerti, da vari anni, alle pubblicazioni accademiche, ci è doppiamente caro.

E' stato provveduto alle nomine previste dallo Statuto, chiamando all'ufficio di vice-presidente per l'anno 1958 il consocio Vittorio Nobile e riconfermando tesoriere per il triennio 1956-1960 il collega Antonio Scherillo. Non è scaduto alcun concorso a premio, restando tuttora aperto, fino al 31 ottobre venturo, quello biennale bandito nel gennaio 1957 sul tema: « *Studi e ricerche sulla cinetica chimica* ».

Da tre gravissimi lutti fu contristata, nel decorso anno, la nostra Accademia: nel breve giro di appena tre mesi, vennero a mancare tre soci

insigni, tre venerati maestri, che erano stati altissimo decoro del nostro Sodalizio.

Il 26 marzo si spense in Torino, a ottantadue anni, il prof. Modesto Panetti, presidente di quell'Accademia delle Scienze e nostro socio corrispondente, nella sezione delle Scienze matematiche, dal dì 25 luglio 1941. Uomo di elevato ingegno e di eccezionale bontà d'animo, seppe procacciarsi, nella sua instancabile vita di studio e di lavoro, numerose benemerenze, tanto nel campo didattico, con la lunga carriera, svolta dapprima presso la Facoltà d'Ingegneria di Genova e successivamente, per quasi un quarantennio, nel Politecnico di Torino, quanto in quello scientifico, con ricerche di meccanica pura e applicata. Particolarmente noto per le sue importanti indagini rivolte al settore dell'elasticità e resistenza dei materiali, al campo della dinamica delle macchine e a quello dell'aerotecnica, legò soprattutto a quest'ultimo il suo nome, fondando in Torino uno speciale laboratorio con la sezione aerodinamica e con quella per lo studio sperimentale dei motori, ed istituendovi una scuola di perfezionamento nelle costruzioni aerodinamiche.

Il 2 giugno cessò di vivere in Napoli, poco più che settantatreenne e dopo brevissima malattia, il prof. Gaetano Quagliariello, apprezzatissimo maestro di Chimica biologica, che, pur avendo optato per la Classe di Scienze mediche e chirurgiche all'epoca dell'incorporazione di questa nell'antica Società Reale di Napoli, aveva fatto parte della nostra Accademia — prima in qualità di socio corrispondente, e poi come socio ordinario residente nella sezione delle Scienze naturali — dal marzo 1931 al giugno 1935. Allievo di Filippo Bottazzi, del quale nel 1941 lesse una vibrante, efficacissima commemorazione, inserita nel nostro Rendiconto, e al par di lui instancabile nell'insegnamento, al quale dedicò con entusiastico fervore tutte le sue migliori energie, Quagliariello fu anche sperimentatore provetto, che nel campo delle proteine del sangue, dell'emocianina, del fibrinogeno, della sintesi e della scissione enzimatica della nicotinammide, dei lipidi, e in tanti altri settori della biochimica, seppe compiere indagini originalissime di grande importanza, divenute ormai classiche e servite di base a numerose ricerche di altri studiosi. Delle sue preclare doti di indagatore appassionato e sagace, di maestro esemplare, di uomo profondamente religioso che con alto senso del dovere e costante spirito di umiltà e di giustizia tenne tutte le numerose cariche accademiche e politiche che da ogni parte gli venivano affidate, ha degnamente parlato il collega Francesco Cedrangolo in una commossa rievocazione dello scorso luglio, inserita negli Atti dell'Accademia di Scienze mediche e chirurgiche.

Poche settimane più tardi, il 27 giugno, chiudeva la sua vita terrena, pure nella nostra città, in età di ottantasei anni, Giuseppe De Lorenzo, che di quest'Accademia, e dell'intera Società Reale, era stato, per più di mezzo secolo, socio attivissimo, insuperato animatore, sapiente organizza-

tore, occupando per molti anni, a varie riprese, le cariche di segretario, di presidente di classe, di segretario generale e di presidente generale. Anche di questa nobilissima e poliedrica figura di scienziato, letterato, artista e filosofo — che con i suoi più che duecentocinquanta scritti, comprendenti un periodo sessantacinquennale di ricerche (1892-1956), lascia orma vasta e duratura in ciascuno di questi così svariati campi dello scibile — è stata recentemente tenuta, in questa medesima sede, una necrologia da colui che ora vi parla; sicchè a tutti sembrerà superfluo che il vostro segretario spenda altre parole per rilevare, ancora una volta, l'importanza, già universalmente nota ed apprezzatissima, dei risultati conseguiti dal suo impareggiabile Maestro nelle varie scienze della terra (geologia, geografia fisica, vulcanologia, paleontologia ecc.), nonchè la profondità degli studi da lui compiuti nei più larghi dominî della letteratura, dell'arte e del pensiero filosofico e religioso. Il Rendiconto accademico ha, d'altra parte, ospitato e proprio in questi giorni pubblicato tale ricordo biografico e bibliografico del decano fra i nostri soci.

Mi sia pertanto concesso di chiudere il mio dire, mandando, anche a nome vostro, alla venerata memoria di tutte queste care figure scomparse — che alla potenza dell'ingegno e all'amore per la ricerca aggiunsero la semplicità e la modestia della vita, la dirittura e la bontà del carattere, la simpatia e l'amabilità delle maniere — il mesto reverente omaggio del nostro sempre vivo ed accorato rimpianto.

OSSERVAZIONI IN TEMA DI STATI TENSIONALI PIANI

Nota del socio corrispondente Vincenzo Franciosi

(Adunanza del 4 gennaio 1958)

Sunto. -- Si precisa entro quali limiti è possibile impostare in rigore il problema dell'equilibrio elastico nell'ambito degli stati tensionali piani.

E' consuetudine definire *piano* lo stato tensionale nell'intorno di un punto P_0 se accade che, descrivendo il generico elemento areale di normale n la stella di sostegno P_0 , il corrispondente vettore tensione \bar{t}_n descrive un piano, detto *piano delle tensioni*. Ciò si verifica, per esempio, se in un qualsiasi riferimento triortogonale $0ijk$ le tre componenti del tensore delle tensioni in P_0 contenenti lo stesso indice j si annullano: $t_{jj} = t_{ji} = t_{jk} = 0$.

In tal caso il piano ik è il piano delle tensioni; si ha conferma di ciò attraverso le equazioni di CAUCHY. Uno stato tensionale piano si incontra, come noto, nel solido di DE SAINT-VENANT, ove nel punto generico il piano delle tensioni è quello definito dai due vettori σ_z e τ_z .

In genere, l'esistenza di uno stato tensionale piano si riconosce a posteriori, dopo aver risolto cioè il problema dell'equilibrio elastico senza alcuna ipotesi pregiudiziale: così appunto si opera per il solido di DE SAINT-VENANT. Alcune volte, però, si pone a priori la condizione di planietà; si ha il vantaggio così di ridurre a tre le funzioni incognite, se queste si assumono coincidenti con le componenti di tensione riferite ad una terna $x y z$ di assi di cui due, $x y$, giacenti nel già noto piano delle tensioni. E' quanto si fa nella risoluzione del problema della *lastra*, intendendo come tale un corpo, costituito di materiale ad elasticità lineare, omogeneo ed isotropo, di forma cilindrica o prismatica, in cui l'altezza sia trascurabile rispetto alle dimensioni della base, e che sia caricato solo sulla superficie laterale, da forze distribuite uniformemente lungo l'altezza. Per una struttura siffatta il tecnico ritiene lecito supporre che le componenti σ_z τ_{zx} τ_{zy} (si assume un riferimento in cui l'asse z sia parallelo all'asse del cilindro), nulle in rigore sulle due basi, lo siano pure nell'interno del corpo, attesa l'esiguità dello spessore; e cioè ammette a priori l'esistenza in ogni punto di un piano delle tensioni parallelo ad $x y$.

Inoltre, si fa una seconda approssimazione, ritenendo che le altre tre

componenti σ_x , σ_y , τ_{xy} siano indipendenti da z ; questa ipotesi si accetta nello stesso spirito della prima, e cioè anch'essa si poggia sull'esiguità dello spessore (*).

Le equazioni indefinite dell'equilibrio si riducono così alle due

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 ; \end{aligned}$$

perchè la terza sia identicamente soddisfatta, occorre che si verifichi $Z=0$, e questa ulteriore ipotesi è conforme alle condizioni di simmetria fisica e geometrica del complesso rispetto al piano medio della lastra.

Si riportano qui di seguito le condizioni di congruenza, che è necessario siano rispettate dalle componenti di deformazione espresse in funzione delle componenti di tensione attraverso le relazioni del NAVIER:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Come noto, solo tre delle (2) sono indipendenti.

Le relazioni di NAVIER si specializzano, nel caso in esame, nelle

(*) E' appena necessario avvertire che la seconda ipotesi non è caratteristica di ogni stato tensionale piano; esemplificando, nel solido di DE SAINT-VENANT essa non corrisponde al vero.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) & \gamma_{yz} &= 0 \\
 \varepsilon_z &= -\frac{1}{Em} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{xz} &= 0.
 \end{aligned}$$

La prima delle (2), attraverso le (3) e le (1), porge

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

Le (1) e la (4) sono le tre equazioni delle quali in genere ci si serve, unitamente alle condizioni al contorno, per la determinazione delle tre funzioni σ_x , σ_y , τ_{xy} ; è necessario però — e questo è trascurato dai trattatisti — che anche le altre cinque equazioni di congruenza siano rispettate, e ciò porta ad un aumento del numero di equazioni rispetto a quello delle funzioni incognite. Dalla seconda e terza delle (2) si trae

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 0
 \end{aligned}$$

che per le (3) si traducono nelle altre

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} &= 0.
 \end{aligned}$$

La quarta e la quinta delle (2) sono identicamente soddisfatte; dalla sesta si trae

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

che per le (3) si traduce nell'altra

$$(8) \quad \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Dalle (6) e dalla (4) si trae per le forze di massa l'ulteriore condizione

$$(9) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

questo significa che in rigore uno stato tensionale piano può aversi solo se è rispettata la (9), in particolare ciò accade se le forze di massa sono nulle, o costanti.

La (4) è perciò sostituita dall'altra

$$(10) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

che deriva dalle (6) direttamente. Perciò le equazioni indipendenti da rispettare sono le (1), le (6) e le (8), in numero di cinque. Si deduce da questo che, una volta ottenuta una soluzione del sistema (1) (4), o (1) (10), unito alle condizioni al contorno che il caso particolare comporta, è necessario controllare se la soluzione rispetta anche le (6) e la (8). Se esse sono verificate, la soluzione è valida in rigore, ed è anche l'unica possibile, conformemente al principio di unicità; se le (6) ed (8) non sono verificate, la soluzione è accettabile solo in via di approssimazione, ed è perciò condizionata all'ipotesi di piccolo spessore della lastra.

E' interessante il caso in cui il modulo di Poisson $\frac{1}{m}$ è uguale a zero, cui corrisponde materiale privo di deformabilità trasversale; con buona approssimazione il conglomerato cementizio verifica tale comportamento. Per $\frac{1}{m} = 0$, dalle (3) risulta $\varepsilon_z = 0$, e perciò tutte le equazioni (2) sono identicamente soddisfatte, ad eccezione della prima; le uniche equazioni indipendenti sono le (1) e la (4), in numero pari a quello delle funzioni incognite. In questo caso la possibilità di soluzione delle (1) e della (4) dipende soltanto dalle condizioni al contorno, e precisamente dalle forze agenti sulla superficie cilindrica della lastra; se queste sono tutte parallele al piano $x y$, e indipendenti da z , le condizioni al contorno sono compatibili con la posizione $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$, e con l'ipotesi di invarianza dello stato tensionale rispetto a z , e perciò le (1) e (4) ammettono soluzione. Non occorre più, per $\frac{1}{m} = 0$, condizionare i risultati all'ipotesi di esiguità dello spessore. Si osservi che per $\frac{1}{m} = 0$, essendo $\varepsilon_z = 0$, allo stato di tensione piano si associa uno stato di deformazione pur esso pia-

no, e l'equazione fondamentale degli stati piani di deformazione

$$(11) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

coincide con la (4), semplificandosi tutte e due nella (10).

La possibilità di riconoscere a priori, per $\frac{1}{m} = 0$, l'esistenza di uno strato rigorosamente piano, trova conferma nel fatto che negli stati piani di deformazione tutte le (2) dalla seconda alla sesta sono sempre identicamente soddisfatte, e soltanto tre equazioni indipendenti regolano il problema.

A titolo di esempio, si riportano alcune semplici applicazioni. La risoluzione delle (1) (10) si persegue in pratica attraverso la funzione Φ delle tensioni o di AIRY, dalla quale si traggono per derivazione le componenti di tensione :

$$(12) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} .$$

La funzione Φ è biarmonica

$$(13) \quad \Delta_4 \Phi = 0 ,$$

e si dimostra che in ogni punto del contorno sia la Φ che la sua derivata normale $\frac{d\Phi}{dn}$ sono univocamente determinate (la Φ a meno di una costante) in funzione delle forze applicate; ciò assicura dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema. Considerata una lastra rettangolare la cui sezione con il piano xy sia di dimensioni $l \times h$, e assunto il riferimento xy nel piano medio con origine nel centro e asse x orientato secondo l , una soluzione della (13) è

$$(14) \quad \Phi = c_1 y^3 + c_2 y^2$$

da cui si trae

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 6 c_1 y + 2 c_2 \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno fanno riconoscere che lo stato di sollecitazione (15) si verifica se sulle due facce $x = \pm \frac{l}{2}$ sono applicate delle forze superficiali p_x aventi lo stesso andamento delle σ_x ; queste forze equivalgono ad una forza N applicata nel baricentro della faccia e agente se-

condo x , e ad una coppia M il cui asse è parallelo a z . In funzione di N ed M le (15) forniscono

$$(16) \quad \sigma_x = \frac{My}{I} + \frac{N}{A}$$

essendo I il momento d'inerzia della sezione yz rispetto all'asse z , ed A la sua area. Si è cioè in presenza della sollecitazione di pressoflessione; dal suo studio rigoroso condotto con riferimento al solido di DE SAINT-VENANT risulta che l'espressione (16) è esatta. Ciò trova riscontro nel fatto che le (15) soddisfano, oltre che le (1) e (10), anche le (6) e le (8).

Si cambi il riferimento, trasladolo in modo da far coincidere l'origine 0 con il baricentro di una delle facce di dimensione h ; una soluzione della (13) è

$$(17) \quad \Phi = c \left(xy^3 - \frac{3}{4} h^2 xy \right)$$

da cui si deduce

$$(18) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 6 c x y = \frac{Tx}{I} y \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 3 c \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Dalle condizioni al contorno si trae che il quadro (18) è generato da una forza T applicata sulla base $x=0$ secondo l'asse y , e da una forza uguale e contraria a T applicata sulla base $x=l$ assieme ad una coppia $M=Tl$ con asse parallelo a z .

E' questa la cosiddetta sollecitazione di taglio e flessione; dalla trattazione rigorosa del DE SAINT-VENANT risulta che nella sezione rettangolare le σ_x τ_{xy} τ_{xz} sono fornite chiamando b la dimensione secondo z , da (*)

$$(19) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Tx}{I} y \\ \tau_{xz} &= -\frac{T}{I} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \frac{T}{I} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2(m+1)} \right) \end{aligned}$$

(*) C. L. RICCI: *Meccanica applicata alle costruzioni*, pag. 496 (E. P. S. A., Napoli, 1942).

dove è

$$(20) \quad F = \frac{b^3}{4 \pi^3 (m+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \frac{\cosh \left(\frac{2n\pi}{b} y \right) \cosh \left(\frac{2n\pi}{b} x \right)}{\cosh \left(\frac{n\pi}{b} h \right)} + \\ + \left(\frac{h^2}{8} - \frac{b^2}{24(m+1)} \right) x.$$

La soluzione (18) è perciò solo approssimata; ciò è confermato dal fatto che le (18) soddisfano le (6), ma non la (7).

Per $\frac{1}{m} = 0$, la (20) si riduce a

$$F = \frac{h^2}{8} x$$

e le (19) forniscono

$$(21) \quad \sigma_x = \frac{Tx}{I} y \\ \tau_{xx} = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{T}{I} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Le (21) coincidono con le (18), come era da attendersi, poichè per $\frac{1}{m} = 0$ le (6) e (7) sono identicamente soddisfatte.

SULLA RAPPRESENTAZIONE FINITA DI ELEMENTI DIFFERENZIALI
DELL' S_r COMPLESSO

Nota del socio ordinario Nicolò Spampinato

[Adunanza del dì 1° febbraio 1958]

Sunto. — Si mette in rilievo l'intervento della teoria delle algebre nei diversi metodi di rappresentazione finita di elementi differenziali. S' introduce, con metodo sintetico, una rappresentazione finita degli E_1 di S_r in un S_{2r+1} , ed una rappresentazione finita degli E_2 di S_r in un S_{3r+2} .

Premessa. — In note precedenti ho già messo in evidenza come lo studio di una curva C piana, o di un S_r con $r > 2$, quando si considera come costituita dai suoi $\infty^1 E_1$, equivale allo studio di una V_3 dell' S_{2r+1} , costituita da ∞^1 piani, rappresentanti tali $\infty^1 E_1$. Inoltre nel piano rispondente all' $E_1 = XX_1$, di centro X , è determinata una retta da tale centro X . Nella V_3 si hanno, pertanto, ∞^1 rette costituenti una rigata che rappresenta la data curva come insieme dei suoi ∞^1 punti, e ∞^1 piani generatori [che rappresentano la stessa curva come insieme dei suoi $\infty^1 E_1$]. *Tali ∞^1 piani risultano tangenti alla rigata nei punti di una sua curva direttrice, proiettiva alla data curva C .*

Ne segue una rappresentazione finita degli $\infty^{2r-1} E_1$ di S_r in una congruenza di ∞^{2r-1} piani dell' S_{2r+1} congruenza che indichiamo con H_{2r-1} . Gli $\infty^{r-1} E_1 = XX_1$, aventi un fissato centro X , risultano rappresentati dagli ∞^{r-1} piani della congruenza H_{2r-1} passanti per una determinata retta, rappresentante il centro fisso X , e costituenti un S_{r+1} .

Gli ∞^r punti X di S_r risultano invece rappresentati dalle ∞^r rette di una W_{r+1} di CORRADO SEGRE dell' S_{2r+1} , congiungenti le coppie di punti omologhi in una proiettività fra due S_r indipendenti dell' S_{2r+1} .

Nel caso $r = 2$ si ha, in particolare, una contemporanea rappresentazione dei punti X del piano S_2 e degli $\infty^3 E_1 = XX_1$ di detto S_2 , con le ∞^3 rette di una W_3 di CORRADO SEGRE e con gli ∞^3 piani di una congruenza di piani H_3 dell' S_5 , rispettivamente. Ad un fascio di E_1 , di dato centro X , corrisponde un fascio di piani di un S_3 di S_5 , avente per asse la retta g della W_2 che rappresenta X .

In questo caso $r = 2$ si ha già una classica rappresentazione degli $\infty^3 E_1$ di S_2 con ∞^3 punti di una V_3 ⁶ di un S_7 (anzichè con gli ∞^3 piani della

congruenza H_3 di un S_5). Tale V_3^6 è una sezione iperpiana della V_4^6 , di S_8 , di CORRADO SEGRE, in cui si rappresentano le ∞^4 coppie *punto-retta* di un piano punteggiato e di un piano rigato, considerando le ∞^3 particolari coppie *punto-retta appartenentisi* di un piano punteggiato e di un piano rigato, aventi lo stesso sostegno; tali ∞^3 coppie sono in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con gli ∞^3 $E_1 = XX_1$ di tale piano sostegno. Di tale V_3^6 di S_7 si è occupato E. BOMPIANI ¹⁾, con lo scopo di sostituire alla considerazione di punti o elementi « infinitamente vicini » enti finiti nello studio della *geometria degli elementi differenziali*.

E' bene mettere in rilievo (§ 1) che nella rappresentazione degli ∞^3 E_1 di S_2 nella sezione iperpiana della varietà di CORRADO SEGRE V_3^6 di S_8 interviene l'algebra dei numeri bicompleksi [introdotta dallo stesso SEGRE e che, in ordine ai tre tipi di rappresentazioni complesse del piano bicompleso, in questo caso è usata la II^a rappresentazione. Nel § 1 di questa nota si mette anche in rilievo come usando la I^a e la III^a rappresentazione complessa del piano bicompleso si ottengono altre due rappresentazioni degli ∞^3 E_1 del piano complesso.

L'altro tipo di rappresentazione di tali ∞^3 E_1 , con gli ∞^3 piani della congruenza H_3 dell' S_5 sopra considerata, è invece ottenuta con l'intervento di un'altra algebra, quella dei numeri biduali, e precisamente dalla I^a *rappresentazione complessa del piano biduale*. Nel § 2 si richiama, in primo luogo, tale rappresentazione finita degli E_1 di S_2 , ed, in generale, di S_r , con r qualunque, già studiata in altri lavori. In secondo luogo si studia una rappresentazione finita degli E_2 di S_r in un S_{3r+2} , estendendo una rappresentazione degli E_2 dell' S_2 in un S_8 già considerata in altri lavori con l'intervento della I^a *rappresentazione complessa del piano tripotenziale*. Un E_2 non di flesso risulta rappresentata da un S_2 -cono quadrico. E' bene notare esplicitamente che si ottengono, in ogni caso, altri due tipi di rappresentazioni di elementi differenziali suddetti con l'intervento della II^a o III^a rappresentazione complessa dell' S_r biduale nel caso degli E_1 , e dell' S_r tripotenziale nel caso degli E_2 . Si noti inoltre che volendo rappresentazioni di elementi differenziali E_{n-1} si può fare intervenire una qualunque delle tre rappresentazioni complesse dell' S_r n -potenziale.

NOTA. — La rappresentazione di una curva algebrica piana di ordine n e classe m (considerata come insieme dei suoi ∞^1 E_1) è data, nella V_3^6 di S_7 , da una curva di ordine $n + m$ [come ha dimostrato il BOMPIANI a pag. 367 nella citata nota]. La stessa curva è rappresentata nella con-

¹⁾ E. BOMPIANI. *Sulla varietà rappresentativa degli elementi lineari del piano proiettivo*. (Rend. Acc. Lincei, vol. XIX, 2° semestre 1955, pp. 207-212 e pp. 361-367). — *Rappresentazione di elementi differenziali del piano proiettivo*. (Rend. Sem. Mat. dell' Univ. e Pol. di Torino, Vol. 16^o, 1956-57),

gruenza H_3 di S_5 da una V_3 , costituita da ∞^1 piani, pure di ordine $n+m$. La somma $\eta = n + m$, detta *ordine completo* della curva, insieme alla somma $\sigma = k + i$ dei punti doppi cuspidali e dei flessi della curva, interviene nella formola

$$(I) \quad p = \frac{\sigma - \eta}{4} + 1$$

che dà il genere p della curva. Ebbene i due caratteri η e σ , attraverso la V_3 di S_5 che dà la rappresentazione della curva, sono dati: il primo η dall'ordine della V_3 , il secondo σ dal numero delle coppie di piani generatori della V_3 che risultano conspaziali ed infinitamente vicini. (Due piani generatori generici di V_3 appartengono ad un iperpiano di S_5). Inoltre quant'è detto per la V_3 di S_5 vale pure per la V_{2r+1} determinata da una curva algebrica di S_r con $r > 2$. Si ha perciò una formola, la (I), che permette di calcolare il genere di una curva algebrica di S_r , con i due caratteri proiettivi: l'ordine completo η ed il carattere cuspidale σ determinati dalla curva [come *curva completa*, cioè come insieme delle ∞^1 coppie punto-retta tangente] qualunque sia la dimensione r dell' S_r ambiente. [N. SPAMPINATO. *Carattere singolare e cuspidale di una curva algebrica completa*. Rend. Acc. Sc. di Napoli, Serie 4, Vol. XXII, 1955. *Il genere di una curva algebrica di S_r* . Giornale di Matematiche di Battaglini. Volume LXXXIV. 5^a Serie 1956].

§ 1

Fissato nel piano un sistema di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) di punto, e (u_1, u_2, u_3) di retta, con la condizione d'incidenza:

$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

la totalità delle ∞^3 coppie punto-retta appartenentisi del piano, ovvero degli ∞^3 elementi differenziali E_1 , è rappresentata con gli ∞^3 punti di una sezione iperpiana della varietà V_4^6 di S_8 da C. SEGRE di equazioni parametriche:

$$(2) \quad X_{ij} = x_i u_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

e precisamente nella sezione della V_4^6 ottenuta con l'iperpiano di equazione

$$(3) \quad X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0$$

che si ricava dalla condizione d'incidenza (1), per le (2).

In tale rappresentazione degli E_1 del piano interviene l'algebra dei numeri bicomplexi, perchè la V_4^6 di C. SEGRE [in ordine alla teoria degli S_r legati ad un'algebra] costituisce la seconda rappresentazione del piano bicomplesso (che dà il prodotto topologico di due piani complessi), dato che i 9 valori X_{ij} dati dalle (2) non sono altro che i minori non nulli, del second'ordine, estratti dalla matrice:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \end{vmatrix},$$

composta con i tre numeri bicomplexi, sotto forma di matrici quadrate,

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & u_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & u_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & u_3 \end{vmatrix}$$

determinate dalla coppia punto-retta $(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3)$ [senza la condizione (1) d'incidenza].

Il punto bicomplesso, rispondente a tale coppia punto-retta ha per coordinate le tre matrici (5). Si noti che la possibilità di moltiplicare le x_j per un fattore non nullo ρ , e le u_j per un fattore non nullo σ equivale alla possibilità di sostituire alla matrice (4) la matrice:

$$(4') \quad \begin{vmatrix} \rho x_1 & 0 & \rho x_2 & 0 & \rho x_3 & 0 \\ 0 & \sigma u_1 & 0 & \sigma u_2 & 0 & \sigma u_3 \end{vmatrix}$$

composta mediante le tre matrici che si ottengono moltiplicando le tre matrici (5), per la matrice:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix}$$

che rappresenta un numero bicomplesso non nullo, nè divisore dello zero, essendo ρ e σ entrambi non nulli.

Se del piano bicomplesso si considera ora la prima rappresentazione [in una congruenza di rette dell' S_5 complesso] questa fa corrispondere al punto bicomplesso di coordinate (5) la retta dell' S_5 [in cui è fissato un sistema di 6 coordinate omogenee], congiungente i due punti aventi per coordinate gli elementi delle due righe della matrice (4) [o 4'). Il primo di tali due punti appartiene al piano S_2 di S_5 i cui punti hanno nulle le tre coordinate di posto pari il secondo varia nel piano S_2' i cui punti hanno nulle le coordinate di posto dispari, e quindi la congruenza è costituita dalle ∞^4 rette congiungenti le coppie di punti di S_2 ed S_2' . Per il generico punto di S_5 di coordinate

$$(7) \quad (x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3)$$

passa una sola retta della congruenza: quella congiungente il punto (x_1, x_2, x_3) del piano S_2 con il punto (u_1, u_2, u_3) del piano S'_2 .

L'equazione (1) data dalla condizione d'incidenza nel piano dell'insieme degli ∞^3 elementi E_1 , rappresenta nell' S_5 con le coordinate omogenee (7) una iperquadrica V_4^2 . Se il punto di coordinate (7) appartiene alla V_4^2 , apparterrà a questa iperquadrica tutta la retta della congruenza passante per esso, descritta dal punto:

$$(8) \quad (\rho x_1, \sigma u_1, \rho x_2, \sigma u_2, \rho x_3, \sigma u_3),$$

al variare dei due parametri omogenei ρ, σ , e quindi la V_4^2 è composta con ∞^3 rette della congruenza che dà in S_5 la prima rappresentazione del piano bicompleso. Tali ∞^3 rette generatrici della V_4^2 risultano in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con le coppie punto-retta appartenenti $(x_i), (u_j)$ del piano dato e quindi con gli ∞^3 elementi E_1 di tale piano. Si ha perciò: I) Con la prima e la seconda rappresentazione del piano bicompleso si determinano due rappresentazioni degli elementi lineari E_1 del piano proiettivo, rispettivamente:

a) con le ∞^3 rette generatrici di una iperquadrica V_4^2 di S_5 ;

b) con gli ∞^3 punti di una V_3^6 di S_7 .

La V_4^2 nell' S_5 di coordinate (7) ha l'equazione (1).

La V_3^6 nell' S_7 , di $S_8 (X_{ij})$, di equazione (3), è l'intersezione di tale iperpiano S_7 con la V_4^6 di C. SEGRE di equazioni parametriche (2) in $S_8 (X_{ij})$.

Quando un $E_1 = XX_1$ del piano proiettivo dato [che può supporre coincidente col piano $S_2 (x_1, x_2, x_3)$ dell' S_5 costituito dai punti (7) con le coordinate di posto pari, u_j , nulle] col centro nel punto $X (x_j)$, posto nella retta XX_1 , si rappresenta colla retta generatrice della V^2 descritta dal punto (8) al variare di ρ e σ , si può assumere come immagine del punto X origine dell' $E_1 = XX_1$ lo stesso punto X di tale generatrice [che si ottiene per $\sigma = 0$ ρ non nullo]. Gli $\infty^1 E_1$ aventi nel piano $S_2 (x_j)$ lo stesso punto origine X , saranno rappresentati da ∞^1 generatrici della iperquadrica V_4^2 , e precisamente dalle ∞^1 generatrici della V_4^2 , che secano il piano S_2 nello stesso punto X . Si ha perciò:

II) Nella V_4^2 di S_5 si ha una contemporanea rappresentazione degli $\infty^3 E_1 = XX_1$ del piano proiettivo e degli ∞^3 punti origini X , con le ∞^3 generatrici della V_4^2 e con gli ∞^2 punti di appoggio di tali ∞^3 rette generatrici negli ∞^2 punti del piano direttore $S_2 (x_j)$ della V_4^2 .

Si noti ora che le coordinate (u_j) della retta a cui appartiene un E_1 col centro X in un fissato punto $X (x_j)$ del piano devono soddisfare all'equazione (1) che nel piano $S'_2 (u_1, u_2, u_3)$ di S_5 rappresenta una retta r' a cui si devono appoggiare le ∞^1 generatrici della V_4^2 che passano per il fissato punto X di S_2 e quindi gli $\infty^1 E_1$ con lo stesso centro X sono rappresentati da ∞^1 generatrici della V_4^2 costituenti un fascio: il fascio di centro X nel piano congiungente X con la retta r' di S'_2 , di equazione (1) nelle coor-

dinate di punto (u_j) del piano S'_2 , determinata dal fissato punto X di S_2 , dato che i coefficienti di tale equazione (nelle incognite) u_j sono le coordinate x_j di tale punto X . Si ha perciò:

III) Le ∞^3 rette generatrici della iperquadrica V_4^2 sono distribuiti in ∞^2 fasci con i centri negli ∞^2 punti nel piano $S_2(x_j)$, posti in ∞^2 piani sostegno secanti S'_2 nelle ∞^2 rette di questo piano. Le rette generatrici del fascio di centro $X(x_j)$ secano in $S'_2(u_j)$ la retta r' di equazione (1), e rappresentano gli $\infty^1 E_1 = XX_1$ del piano S_2 col centro nello stesso punto X .

Analogamente si dimostra che:

III₁) Le rette generatrici della iperquadrica V_4^2 si distribuiscono in un secondo sistema di ∞^2 fasci, con i centri negli ∞^2 punti nel piano $S_2(u_j)$, posti in ∞^2 piani sostegno secanti l' $S_2(x_j)$ nelle ∞^2 rette di questo piano. Le rette generatrici del fascio di centro $T(u_j)$ secano in $S_2(x')$ la retta t di equazione (1), e rappresentano gli $\infty^1 E_1 = XX_1$ del piano S_2 posti nella retta t .

NOTA. — Del piano bicomplesso, in ordine alla teoria degli S_r legati ad un'algebra, si ha una terza rappresentazione nei punti di un S_4 (anzichè nei punti della V_4^6 di C. SEGRE di S_8 data dalla seconda rappresentazione), e si ottiene fissando un S_4 nell' S_5 ambiente della congruenza che da' la prima rappresentazione, in posizione generica, e quindi non passante per i due piani $S_2(x_j)$ ed $S_2(u_j)$ sopra considerati ed assumendo come immagine di un punto bicomplesso il punto di S_4 intersezione con la retta della congruenza che rappresenta tale punto bicomplesso nella prima rappresentazione. Questa terza rappresentazione è, però, con eccezioni, date dei punti di S_4 appartenenti alle due rette di S_4 intersezioni con i due piani di S_5 $S_2(x_j)$ ed $S_2(u_j)$.

Considerando in S_5 la V_4^2 le cui generatrici rappresentano gli E_1 del piano e secandola con l' S_4 si avrà una V^2_3 che darà con i suoi ∞^3 punti un'altra rappresentazione degli E_1 del piano, ma con eccezioni.

§ 2

1. Sulla determinazione degli E_1 dell' S_r .

Per fissare in un S_r un E_1 di centro $X(x_j)$, basta fissare un altro punto $Y(y_j)$, distinto da X , determinante con X una retta $t = XY$, e quindi si ha un determinato E_1 di centro X e tangente t , costituito dalla coppia di punti infinitamente vicini XX_1 , con X_1 nella retta t . Scritte le equazioni parametriche della retta t con un parametro ρ , in modo che al valore $\rho = 0$ corrisponda il punto origine X dell' E_1 ,

$$(1) \quad \eta_j = x_j + \rho y_j \quad (j = 1, \dots, r+1)$$

la condizione che l' $E_1 = XX_1$ appartenga ad una data ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r , di equazione

$$(2) \quad f(\eta_j) = 0,$$

si esprime imponendo che l'equazione di grado n in ρ che si ottiene sostituendo le (1) nella (2)

$$(3) \quad f(\rho) = 0,$$

ammetta la radice $\rho = 0$ almeno doppia. Quindi nel polinomio $f(\rho)$ deve essere nullo il termine noto ed il coefficiente di ρ , cioè deve essere:

$$(4) \quad \begin{cases} f(x_j) = 0 \\ \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j = 0. \end{cases}$$

Si ha perciò:

Un E_1 di S_r di centro X e di tangente $t = XY$ si può considerare determinato dalla coppia ordinata di punti (X, Y) .

Il sistema (4) esprime le condizioni necessarie e sufficienti affinché l' E_1 di centro $X(x_j)$ e di tangente $t = XY$, con $Y(y_j)$, appartenga alla ipersuperficie V_{r-1}^n rappresentata dalla prima equazione del sistema stesso.

2. Sulla determinazione degli E_2 di S_r .

Per fissare in S_r un E_2 di centro X , di tangente $t = XY$, basta fissare un terzo punto Z non appartenente alla retta t , e considerare la conica c^2 di equazioni parametriche

$$(5) \quad \eta_j = x_j + \rho y_j + \rho^2 z_j \quad (j = 1, \dots, r+1)$$

passante per X , appartenente all' $S_2 = XYZ$ con la tangente nel punto X data dalla retta $t = XY$. Resta allora determinato l' $E_2 = XX_1X_2$ della conica c^2 col punto origine nel punto X . La conica c^2 è determinata dalla terna ordinata di punti (X, Y, Z) perchè è la conica del piano $\pi = XYZ$ soddisfacenti alla 5 condizioni: passa per i punti X e Z , ha la tangente in X nella retta XY , e la tangente in Z la retta ZY , ed infine passa per il punto $T(x_j + y_j + z_j)$ rispondente per le (5) al valore $\rho = 1$ del parametro non omogeneo ρ .

La condizione che l' $E_2 = X_1XX_2$ della conica c^2 , di equazioni parametriche (5) appartenga alla ipersuperficie di equazione (2) si esprime imponendo che l'equazione di grado $2n$ in ρ che si ottiene sostituendo le (5) nella (2) ammetta la radice $\rho = 0$ almeno tripla. Quindi nel polinomio di grado $2n$ che si ottiene dopo tale sostituzione nel primo membro $f(\eta_j)$

della (2), devono essere nulli i termini di grado 0,1 e 2, cioè deve essere soddisfatto il sistema di tre equazioni che si ottiene associando alle prime due equazioni (4) la terza equazione:

$$(4_1) \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} z_j + \frac{1}{2} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} y_j \right)^{(2)} = 0.$$

Si ha perciò:

Un E_2 di S_r di centro $X(x_i)$, di tangente $t = XY$ con $Y(y_j)$ distinto da X e posto nella conica c^2 di equazioni parametriche (5) del piano XYZ , con $Z(z_j)$ non appartenente alla retta $t = XY$, può considerarsi determinato dalla terna ordinata di punti (X, Y, Z) determinante la conica c^2 mediante le (5).

Il sistema delle tre equazioni (4) e (4₁) esprime le condizioni necessarie e sufficienti affinché l' E_2 determinato dalla terna (X, Y, Z) di punti di S_r appartenga alla ipersuperficie V^n_{r-1} rappresentata dalla prima equazione del sistema.

3. Rappresentazione finita degli E_1 di S_r , con una congruenza di piani di S_{2r+1} .

In un S_{2r+1} fissiamo un S_r ed un S'_r indipendenti. Supponiamo che l' S_r considerato nel n° 1 dove varia il punto X , sia il primo di tali due S_r . Il secondo S'_r supponiamo che sia l'ambiente dove varia la retta t' omologa della retta $t = XY$ di S_r in una prefissata proiettività w' fra S_r ed S'_r . Consideriamo rappresentato l' E_1 , di centro X e tangente $t = XY$, di S_r dal piano Xt' congiungente il punto X di S_r , origine di E_1 , con la retta t' di S'_r omologa della tangente $t = XY$ di detto E_1 nella proiettività w' .

Agli $\infty^{r(r-1)}$ E_1 di S_r corrisponderanno $\infty^{r(r-1)}$ piani di S_{2r+1} . Di tali piani per un punto X di S_r ne passano ∞^{r-1} , che si ottengono congiungendo X con le ∞^{r-1} rette t' della stella di centro X' nell' S'_r indicando con X' l'omologo di X nella proiettività w' fra S_r ed S'_r . Tali ∞^{r-1} piani Xt' costituiscono l' $S_{r+1} = XS'_r$, e rappresentano gli ∞^{r-1} E_1 di S_r aventi uno stesso centro X .

Fissato un generico punto P in S_{2r+1} per esso passa un determinato S_{r+1} della stella di centro S'_r , che seca l' S_r in un determinato punto X . La retta PX di S_{r+1} seca S'_r in un punto diciamo Y' che congiunto col punto X' di S'_r omologo di X nella proiettività w' dà una retta $t' = X'Y'$ con il punto X dà uno degli ∞^{r-1} piani, rappresentanti degli E_1 di S_r , passanti per il punto P . Tali piani costituiscono, pertanto, in S_{2r+1} una congruenza di ordine 1. Sono punti singolari di tale congruenza, diciamo H_{2r-1} , oltre i punti di S'_r , i punti delle ∞^r rette congiungenti le coppie di punti (X, X') omologhi nella proiettività w' fra S_r ed S'_r costituenti una varietà di C. SEGRE che indicheremo con W_{r+1} . Tali generatrici $g = XX'$ della W_{r+1} sono in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni

con i punti X di S_r , e si possono assumere come rappresentanti di tali punti X origini degli E_1 di S_r , già rappresentati nei piani della congruenza H_{2r-1} . Si ha perciò:

I) Un $E_1 = XX_1$ di S_r , di origine X e tangente $t = XX_1$ è rappresentato in S_{2r+1} da un piano $\pi = Xt'$, con t' retta di S_r' omologa di t nella proiettività w' fra S_r ed S_r' . L'origine X di E_1 è rappresentato dalla retta XX' di π , rappresentante l' E_1 . I piani π costituiscono, al variare di E_1 fra gli E_1 di S_r' una congruenza di ordine 1 H_{2r-1} dell' S_{2r+1} . Le rette XX' rappresentanti i punti origini X degli E_1 di S_r formano una varietà di SEGRE W_{r+1}^{r+1} . Per ogni generatrice $g = XX'$ della W_{r+1}^{r+1} passano ∞^{r-1} piani generatori della congruenza H_{2r-1} costituenti nell' $S_{r+1} = XS'_{r+1}$ la stella di piani di asse g e rappresentanti gli E_1 di S_r aventi lo stesso centro X .

Si noti esplicitamente che il piano $\pi = Xt'$, rappresentante l' E_1 di origine X e tangente t contiene due rette di punti singolari della congruenza H_{2r-1} , e precisamente la retta $g = XX'$, rispondente al punto origine X , e la retta t' rispondente alla tangente t dell' E_1 ²⁾.

Nel caso $r=1$ gli ∞^1 E_1 della retta S_1 risultano rappresentati dagli ∞^1 piani del fascio di asse S_1' dell' $S_3 = S_1 S_1'$, e i punti origini X risultano rappresentati alle ∞^1 rette generatrici $g = XX'$ della quadrica W^2_2 , congiungenti le coppie di punti (X, X') di S_1 ed S_1' corrispondentisi nella proiettività w' . Gli ∞^1 piani $\pi = Xt'$ in questo caso, essendo t' la retta s_1' , non sono altro che i piani tangenti alla quadrica W^2_2 nei punti X' della sua direttrice S_1' . Sicchè in questo caso $r=1$ la congruenza di piani H_{2v-1} non è altro che il fascio di piani H_1 di $S_3 = S_1 S_1'$ di asse S_1' .

Nel caso $r=2$ gli ∞^3 E_1 del piano S_2 risultano rappresentati da ∞^3 piani di una congruenza H_3 dell' $S_5 = S_2 S_2'$, ottenuti congiungendo ogni punto X del piano punteggiato S_2 con le rette del fascio di centro X' nel piano rigato S_2' . I punti origini X degli E_1 di S_2 risultano rappresentati dalle ∞^2 generatrici $g = XX'$, della W^3_3 di SEGRE, congiungenti le coppie di punti (X, X') di S_2 ed S_2' corrispondentisi nella proiettività w .

²⁾ Per la relazione fra la congruenza H_{2r-1} e la congruenza H_{2r} di rette che nell' S_{2r+1} rappresenta l' S_r biduale (prima rappresentazione) si veda la nota pubblicata in questi Rendiconti nel vol. XXIII del 1956: *Rappresentazione nell' S_{2r+1} complesso di una serie lineare secata su una curva dell' S_r complesso prolungata nel campo biduale*. In tale nota, oltre alla rappresentazione degli ∞^{2r-1} E_1 dell' S_r , è studiata la V_{2r-1} dell' S_{2r+1} determinata da una ipersuperficie V_{r-1} dell' S_r , la V_{2r} descritta da tale V_{2r-1} al variare della V_{r-1} in un fascio, la V_3^{n+m} determinata da una curva algebrica di un S_k di S_n , di ordine n e classe m , considerata come insieme dei suoi E_1 , ed infine la rappresentazione della serie lineare secata su tale curva da un fascio di ipersuperficie.

Nel caso $r = 3$ gli $\infty^5 E_1$ dello spazio S_3 risultano rappresentati da ∞^5 piani di una congruenza H_5 di $S_7 = S_3 S_3'$, ottenuti congiungendo ogni punto X dello spazio S_3 con le rette della stella di centro X' nello spazio S_3' . I punti origini X degli E_1 di S_3 risultano rappresentati dalle ∞^3 generatrici $g = XX'$ della W_4^4 di C. SEGRE, congiungenti le coppie di punti (X, X') di S_3 ed S_3' corrispondentisi nella proiettività w' .

NOTA. — Volendo usare il *linguaggio degli spazi fibrati* si può considerare, per es. in questo caso $r = 3$, l' S_7 , ambiente della congruenza di piani H_5 , come S_7 *fibrato*, con *fibre piane* costituite dagli ∞^5 piani della congruenza, di ordine 1, H_5 .

Anche la varietà di SEGRE W_4^4 può considerarsi fibrata con ∞^3 fibre, costituite dalle sue ∞^3 rette generatrici $g = XX'$. Ne segue che l' E_1 di S_3 , di centro X e di tangente t , ha il centro rappresentato dalla *fibra* $g = XX'$ della varietà fibrata W_4^4 , ed esso E_1 è rappresentato dalla *fibra*, dell' S_7 fibrato, data dal piano $\pi = Xt'$ [contenente la fibra $g = XX'$, che rappresenta l'origine]. Analogamente nel caso generale r qualunque l' S_{2r+1} ambiente della congruenza di piani, di ordine 1, H_{2r+1} , con i quali sono rappresentati gli $\infty^{2r-1} E_1$ dell' S_r , può considerarsi come un S_{2r+1} *fibrato*, con fibre piane costituite dai piani della congruenza H_{2r+1} . Anche la varietà di C. SEGRE W_{r+1}^{r+1} può considerarsi fibrata con le ∞^r generatrici $g = XX'$. Ne segue, anche in questo caso generale, che ogni E_1 di S_r , di centro X e di tangente t , risulta: col punto centro X rappresentato dalla fibra $g = XX'$ della varietà di SEGRE, ed esso E_1 è rappresentato dalla fibra $\pi = Xt'$ di S_{2r+1} , contenente la fibra $g = XX'$ che rappresenta il punto X origine.

4. Altre due rappresentazioni finite degli E_1 di S_r in S_{3r+2} .

Per la rappresentazione finita degli E_2 a cui si è accennato nel n. precedente è necessario premettere *altre due rappresentazioni degli E_1 di S_r nell' S_{3r+2}* in cui dovremo dopo dare tale rappresentazione degli E_2 . Una seconda rappresentazione finita degli E_1 si ottiene considerando l' S_{3r+2} congiungente l' S_r con due altri S_r indipendenti, diciamo S_r' ed S_r'' , e fissando due proiettività w' e w'' la prima fra S_r ed S_r' e la seconda fra S_r ed S_r'' . Fissato in S_r un E_1 , di centro X e tangente t , si considerino in S_r' ed S_r'' le due rette t' e t'' omologhe di t nelle due proiettività w' e w'' . Resta determinato in S_{3r+2} l' $S_4 = Xt't''$, che si assumerà come rappresentante il dato E_1 di centro X e tangente t in S_r .

Se indichiamo con X' e X'' i punti di t' e t'' omologhi di X per w' e w'' , si assumerà pure come rappresentante il punto origine X del dato E_1 il piano $XX'X''$, piano che risulta appartenente all' $S_4 = Xt't''$ che rap-

presenta l' E_1 . Gli ∞^r punti X di S_r vengono rappresentati negli ∞^r piani generatori della W_{r+2} di C. SEGRE, costituita dai piani congiungenti le terne di punti (X, X', X'') , corrispondentisi nelle proiettività w' e w'' e nella proiettività $w = w' w''$, fra S_r' ed S_r'' , prodotto di w' e w'' .

Gli $\infty^{2r-1} S_4 = Xt' t''$ rappresentati gli $\infty^{2r-1} E_1$ di S_r costituiranno, nell' S_{3r+2} , una varietà V_d a $2r + 3$ dimensioni, che considereremo *fibrata* con le fibre date dai suddetti $S_4 = Xt' t''$ generatori.

Si noti che il piano $\pi = Xt'$ dell' $S_{2r+1} = S_r S_r'$, contenuto nell' $S_{3r+2} = S_r S_r' S_r''$ rappresenta lo stesso E_1 di centro X e tangente t nella rappresentazione [che diremo dilatazione algebrica di 1° grado] considerata nel n. precedente.

Si noti inoltre che l' $S_4 = Xt' t''$, rappresentante tale E_1 in S_{3r+2} , contiene il piano $XX' X''$ della varietà di SEGRE W_{r+2} , rappresentante l'origine X dell' E_1 stesso. Si ha perciò:

II) Un $E_1 = XX_1$ di S_r , di origine X e tangente $t = XX_1$, è rappresentato in S_{2r+2} da un $S_4 = Xt' t''$ con t' e t'' rette omologhe di t nella proiettività w' e w'' fra S_r , S_r' ed S_r'' . L'origine X di E_1 è rappresentata dal piano $XX' X''$, dell' S_4 rappresentante l' E_1 . Al variare di E_1 in S_r i piani $XX' X''$ descrivono una varietà di SEGRE W_{r+2} , e gli $S_4 = Xt' t''$ descrivono una varietà a $2r + 3$ dimensioni, contenente la W_{r+2} .

Considerando nella retta t' il punto X' , nell' $S_4 = Xt' t''$ resta determinato l' $S_3 = XX' t''$, congiungente il punto X con il piano $X' t''$. L' S_3 che così si ottiene risulta pure determinato dal dato $E_1 = XX_1$ di centro X e tangente $t = XX_1$. Si ha così una seconda rappresentazione finita degli E_1 di S_r in S_{3r+2} .

5. Rappresentazione in S_{3r+2} delle terme punto-retta-piano appartenentisi dell' S_r e dei pennelli di $\infty^1 E_2$ determinati da tali terne.

Per la rappresentazione finita degli E_2 , a cui si è accennato nel n. 3, occorre premettere pure nell' $S_{3r+2} = S_r S_r' S_r''$, considerato nel n. precedente, la rappresentazione di una fissata terna (X, t, μ) punto-retta-piano appartenentisi di S_r con l' $S_5 = Xt' \mu''$ congiungente il punto X di S_r , la retta t' di S_r' , omologa di t nella proiettività w' fra S_r ed S_r' , e il piano μ'' , omologo del piano μ nella proiettività w'' fra S_r ed S_r'' .

Si noti che all' $S_5 = Xt' \mu''$ appartiene l' $S_4 = Xt' t''$ che rappresenta l' E_1 rappresentato dalla coppia punto-retta appartenentisi (X, t) , nella varietà H_d (n. 4).

Nel piano μ si hanno $\infty^1 E_2$ contenenti l' E_1 di centro X e tangente t , costituenti un pennello, che può considerarsi determinato dalla terna (X, t, μ) punto-retta-piano appartenentisi. Tale pennello di E_2 può consi-

derarsi rappresentato in S_{3r+2} dall' $S_5 = Xt' \mu''$. [Più avanti vedremo come gli $\infty^1 E_2$ di tale pennello si rappresentano in ∞^1 iperconi quadrici V_4^2 , dell' $S_5 = Xt' \mu''$ rappresentante il pennello stesso].

Variando la coppia punto-retta appartenentisi (X, t) in un fissato piano μ di S_r (se è $r \geq 2$) l' $S_5 = Xt' \mu''$ varierà in una congruenza, diciamo (S_5) dell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$ dell' $S_{3r+2} = S_r S_r' S_r''$, al variare delle ∞^3 coppie (X, t) del piano μ , cioè degli $\infty^3 E_1$ di questo piano μ , determinanti gli ∞^3 pennelli di E_2 dello stesso piano μ , che risulteranno in corrispondenza con gli $\infty^3 S_5 = Xt' \mu''$ della congruenza (S_5) dell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$. Tale congruenza (S_5) è di ordine 1, perchè per un generico punto P fissato in $S_8 = \mu\mu' \mu''$ passa un solo S_5 del tipo $Xt' \mu''$ che si ottiene congiungendo μ'' con il piano del tipo Xt' dell' $S_5 = \mu\mu'$ contenente il punto P_1 proiezione di P da μ'' in detto $S_5 = \mu\mu'$ (dove i piani del tipo Xt' formano la congruenza di ordine 1, H_3 , rappresentante gli E_1 del piano μ , congruenza H_3 considerata nel n. 3). Si ha perciò:

III) *Un pennello di $\infty^1 E_2$ di un piano μ di S_r , contenenti l' E_1 fisso di centro X e tangente t , è rappresentato nell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$ [dell' $S_{3r+2} = S_r S_r' S_r''$] dall' $S_5 = Xt' \mu''$. Agli ∞^3 pennelli di E_2 , in cui si distribuiscono gli $\infty^1 E_2$ del piano μ , corrispondono in $S_8 = \mu\mu' \mu''$ $\infty^3 S_5$ costituenti una congruenza $(S_5)_3$ di ordine 1, ed in corrispondenza biunivoca con le ∞^3 terne punto-retta-piano, (X, t, μ) , del piano μ di S_r .*

Nel caso $r = 2$ l' S_r è l' S_2 dato dal piano μ , e l' S_{3r+2} è l' $S_8 = \mu\mu' \mu''$. I pennelli di S_r si riducono agli ∞^3 pennelli di $S_2 = \mu$ [in cui si distribuiscono gli $\infty^1 E_2$ di tale piano] rappresentati dagli $\infty^3 S_5$ della congruenza $(S_5)_3$ di ordine 1, corrispondenti alle ∞^3 terne punto-retta-piano (X, t, μ) di $S_2 = \mu$.

Nel caso $r = 3$ nell' S_3 abbiamo ∞^3 piani μ , e, in corrispondenza, $\infty^3 S_8 = \mu\mu' \mu''$ costituenti una congruenza di ordine 1, diciamo (S_8) , dell' S_{11} [che dà l' S_{3r+2} , in questo caso $r = 3$]. In ciascuno di tali $\infty^8 S_9$ si avrà una congruenza $(S_5)_3$ costituita dagli $\infty^3 S_5 = Xt' \mu''$ in corrispondenza alle ∞^3 terne punto-rette-piano (X, t, μ) di μ e rappresentanti gli ∞^3 pennelli di μ . Tali ∞^3 congruenze $(S_5)_3$ costituiranno nell' S_{11} una congruenza di $\infty^6 S_5 = Xt' \mu''$, in corrispondenza con le ∞^6 terne punto-retta-piano appartenentisi (X, t, μ) dell' S_3 . Tale congruenza di $\infty^6 S_5$ la indicheremo con $(S_5)_6$, e risulta di ordine 1, come ciascuna delle ∞^3 congruenze $(S_5)_3$ che la costituiscono in S_{11} . La congruenza (S_8) risulta composta con la congruenza $(S_5)_6$, dato che ciascun S_8 di (S_8) è costituita da $\infty^3 S_5$ di $(S_5)_6$. In questo caso $r = 3$ si ha perciò:

III₁). *Gli ∞^6 pennelli di E_2 di uno spazio S_3 , rispondenti alle ∞^6 terne punto-retta-piano appartenentisi (X, t, μ) dell' S_3 , sono rappresentati, nell' $S_{11} = S_9 S_9' S_9''$, dagli $\infty^6 S_5 = At' \mu''$ di una congruenza $(S_5)_6$ di ordine 1. In S_{11} si ha una congruenza (S_8) , di ordine 1, costituita dagli ∞^3*

$S_8 = \mu\mu'\mu''$ con il piano μ variabile in S_3 , composta con la congruenza $(S_5)_6$.

Questa proposizione si estende nel caso r qualunque alla seguente:

III₂). Gli ∞^{3r-3} pennelli di E_2 dell' S_r , rispondenti alle ∞^{3r-3} terne punto-retta-piano appartenentisi (X, t, μ) di S_r , sono rappresentati nell' $S_{3r+2} = S_r S'_r S''_r$ dagli ∞^{3r-3} $S_5 = Xt'\mu''$ di una congruenza $(S_5)_{3r-3}$ di ordine 1. Per $r > 2$ in S_{3r+2} si ha una congruenza, di ordine 1, (S_8) , costituita dagli $S_8 = \mu\mu'\mu''$ al variare del piano μ in S_r , composta con la congruenza $(S_5)_{3r-3}$.

6. Rappresentazione degli E_2 di un pennello di un piano di S_r .

In un piano μ di S_r consideriamo gli $\infty^1 E_2$ di un fissato pennello, contenente l' E_1 fisso di centro X e tangente t , perciò rispondente alla terna ordinata (X, t, μ) , punto-retta-piano appartenentisi, e rappresentato dall' $S_5 = Xt'\mu''$ dell' $S_8 = \mu\mu'\mu''$ di S_{3r+2} .

Sia Y un punto di t distinto da X , e sia Z un punto di μ non appartenente alla retta $t = XY$. Esiste nel piano $\mu = XYZ$ un fascio di coniche passanti per X, X_1, Z, Z_1 , indicando con X_1 il punto di t infinitamente vicino ad X , e con Z_1 il punto infinitamente vicino a Z posto nelle retta ZY . Per ogni conica c^2 non degenerare di tale fascio (c^2) resta determinato un $E_2 = XX_1 X_2$ non di flesso del pennello fissato nel piano μ , contenente l' $E_1 = XX_1$ fisso di centro X e tangente t .

Consideriamo nel piano μ' i tre punti X', Y', Z' , e nel piano μ'' i tre punti X'', Y'', Z'' , omologhi dei tre punti X, Y, Z del piano μ per le proiezioni w' e w'' .

In corrispondenza al fissato fascio di coniche (c^2) di punti base X, X_1, Z, Z_1 del piano $\mu = XYZ$, consideriamo nel piano $XY'Z''$ il fascio di coniche ((c^2)) passanti per X e Z'' ed aventi per tangenti in tali punti le rette XY' e $Y'Z''$. Proiettando del piano $X'X''Y''$ il fascio di coniche ((c^2)) si ottiene un fascio (V^2_4) di iperconi quadrici V^2_4 dell' $S_5 = XY'Z''$. $X'X''Y''$, cioè dell' $S_5 = Xt'\mu''$ rappresentante nell' $S_8 = \mu\mu'\mu''$ il pennello di E_2 del piano μ contenente l' $E_1 = XX_1$ di centro X e tangente fissa. Gli E_2 di tale pennello non di flesso si considerano rappresentati nell' $S_5 = Xt'\mu''$ dagli ∞^1 iperconi quadrici non degeneri del fascio (V^2_4) , aventi tutti il vertice nel piano $X'X''Y''$, cioè nel piano $X't''$, che può considerarsi determinato dall' E_1 fisso di centro X e tangente t , del dato pennello di E_2 .

7. Rappresentazione finita degli E_2 di S_r nell' S_{3r+2} .

Nel caso $r = 2$, in cui l' S_r è un piano μ , in corrispondenza agli ∞^3 pennelli in cui si distribuiscono gli $\infty^4 E_2$ di μ , si hanno in $S_8 = \mu\mu'\mu''$

gli $\infty^3 S_5 = Xt' \mu''$ della congruenza $(S_5)_3$. Ciascun S_5 di tale congruenza è ambiente di un fascio (V_4^2) di iperconi quadrici rappresentanti gli E_2 del pennello che tale S_5 rappresenta per la proprietà III) del n. 5. Si avranno perciò in $S_8 = \mu\mu' \mu'' \infty^4$ iperconi quadrici V_4^2 , distribuiti in ∞^3 fasci (V_4^2) degli $\infty^3 S_5$ della congruenza di ordine 1 $(S_5)_3$. Ne segue che anche tali ∞^4 iperconi quadrici V_4^2 costituiscono, in $S_8 = \mu\mu' \mu''$, una congruenza di ordine 1, che indicheremo con $(V_4^2)_4$, e rappresentante con i suoi ∞^4 iperconi quadrici generatori, gli $\infty^4 E_2$ non di flesso del piano μ .

L'unico E_2 di flesso di origine X , posto nella retta t , del piano μ , si considera rappresentato dallo stesso $S_5 = Xt' \mu''$, che rappresenta l'unico pennello di E_2 del piano μ a cui tale E_2 di flesso appartiene. Si ha perciò:

IV). Gli $\infty^4 E_2$ non di flesso di un piano μ di S_r sono rappresentati dagli ∞^4 iperconi quadrici di una congruenza $(V_4^2)_4$, di ordine 1, dell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$. Gli S_5 distinti ambienti di tali iperconi quadrici sono ∞^3 e costituiscono la congruenza, di ordine 1, $(S_5)_3$ rappresentanti gli ∞^3 pennelli di E_2 del piano μ . Ogni S_5 della congruenza $(S_5)_3$ rappresenta l'unico E_2 di flesso del pennello di E_2 rappresentato da tale S_5 .

Nel caso $r = 3$, in corrispondenza a III₁) del n. 5, si ha:

IV₁). Gli $\infty^7 E_2$ con il flesso di uno spazio S_3 sono rappresentati dagli ∞^7 iperconi quadrici di una congruenza $(V_4^2)_7$, di ordine 1, dell' $S_{11} = S_3 S_3' S_3''$. Gli S_5 distinti ambienti di tali iperconi quadrici sono ∞^6 e costituiscono la congruenza, di ordine 1, $(S_5)_6$ rappresentanti gli ∞^6 pennelli di E_2 dell' S_3 , e gli $\infty^6 E_2$ di flesso dell' S_3 stesso, contenuti negli ∞^6 pennelli ³⁾.

³⁾ Si noti che tale congruenza di ∞^7 iperconi quadrici (V_4^2) dell' S_{11} , rispondente al caso $r = 3$, è stata già notata nello studio della V_8 di S_{11} determinata dalle coniche osculatrici ad una superficie algebrica dell' S_3 , prolungata nel campo tripotenziale, in una nota di questi Rendiconti (Serie 4 - Vol. XXIV - 1957) osservando esplicitamente, nel n. 3, che tale congruenza (V_4^2) dell' S_{11} dà una rappresentazione dell' S_3 differenziale considerato come insieme dei suoi $\infty^7 E_2$.

In relazione al caso $r = 2$, cioè al caso in cui l' S_r è il piano μ considerato nel n. 6, si noti pure che se nel piano μ si considera una curva algebrica avente un punto semplice X e la tangente t in X , prolungando la curva nel campo tripotenziale e passando alla rappresentazione complessa nell' $S_8 = \mu\mu' \mu''$, si ha in questo S_8 una V_5 costituita da ∞^1 iperconi quadrici V_4^2 in corrispondenza agli $\infty^1 E_2$ non di flesso della curva, e quindi con le ∞^1 reti di coniche osculatrici nel punto X [e quindi di E_2 della curva di origine X], risulta rappresentata da un ipercono quadrico V_4^2 del fascio (V_4^2) di iperconi quadrici rispondente al pennello di E_2 contenenti l' E_1 di centro X e tangente t («La Ricerca», Anno VII (Serie II) - Istituto editoriale del Mezzogiorno - 1936). E' tale proprietà che trovasi, pertanto, a base della rappresentazione degli E_2 di un pennello fissata nel n. 6 indipendentemente dalla teoria dei numeri tripotenziiali.

Questa proposizione si estende nel caso $r > 1$ qualunque alla seguente :

IV₂). Gli $\infty^{3r-2} E_2$ non di flesso di S_r sono rappresentati dagli ∞^{3r-2} iperconi quadrici di una congruenza $(V_4^2)_{3r-2}$, di ordine 1, dell' $S_{3r+2} = S_r S_r' S_r''$. Gli S_5 distinti ambienti di tali iperconi quadrici sono ∞^{3r-3} e costituiscono la congruenza, di ordine 1, $(S_5)_{3r-3}$ rappresentanti gli ∞^{3r-3} pennelli di E_2 dell' S_r , e gli $\infty^{3r-3} E_2$ di flesso dell' S_r stesso, contenuti negli ∞^{3r-3} pennelli.

Si noti ora che un $E_2 = XX_1 X_2$ non di flesso, del piano μ di S_r ha :

a) l'origine X rappresentato dal piano $XX'X''$ della varietà di SEGREGRE W_{r+2} (n. 4);

b) l' $E_1 = XX_1$ rappresentato dall' $S_4 = Xt' t''$ (n. 4) contenente il piano $XX'X''$ rappresentante il punto origine X.

Occorre mettere in evidenza in che relazione si trova questo $S_4 = Xt' t''$ con l'ipercono V_4^2 che rappresenta l' $E_2 = XX_1 X_2$, avente per vertice il piano $X' t''$.

Tale piano vertice appartiene all' $S_4 = Xt' t''$, essendo X' un punto di t' , e questo S_4 si può considerare ottenuto proiettando dal piano vertice $X' t''$ la retta XY' essendo Y' un altro punto di t' . Tale retta XY' è la tangente nel punto X a tutte le coniche del fascio (c^2) del piano $XY'Z''$ che proiettate dal vertice $X' t''$ danno il fascio di iperconi (V_4^2) , e quindi l' $S_4 = Xt' t''$. $XY' = Xt' t''$ risulta tangente a tutti gl' iperconi del fascio, ed in particolare all' ipercono V_4^2 che rappresenta il dato $E_2 = XX_1 X_2$ non di flesso, nei punti dell' S_3 generatore che si ottiene proiettando dal vertice il punto di contatto X della tangente XY' alle coniche del fascio.

Si ha perciò :

V). L' $S_4 = Xt' t''$ rappresentante l' $E_1 = XX_1$ di centro X e tangente t del piano μ , è tangente all' ipercono V_4^2 rappresentante un $E_2 = XX_1 X_2$ nei punti dell' S_3 generatore che si ottiene proiettando dal vertice $X' t''$ il punto X, dell' $S_5 = Xt' t''$ ambiente dell' ipercono V_4^2 .

L' $S_3 = XX' t'$ generatore dell' ipercono V_4^2 è pure determinato dall' $E_1 = XX_1$ (Nota del n. 4) e ad esso appartiene pure il piano $XX'X''$ della W_{r+2} rappresentante il punto origine X dell' E_2 .

Tale $S_3 = XX' t'$, al variare di E_1 fra gli $\infty^{2r-2} E_1$ di S_r , descrive una varietà W_{2r+1} contenente la varietà di SEGREGRE W_{r+2} dei piani $XX'X''$.

IL CERCHIO DI MOHR DEL TENSORE SIMMETRICO DEL 2° ORDINE

*Nota del dr. ing. Renato Sparacio,
presentata dal socio corrispondente Vincenzo Franciosi*

(Adunanza del dì 1° febbraio 1958)

Sunto. — Si generalizza la teoria del cerchio di MOHR, ricavandone l'equazione attraverso le componenti di un tensore simmetrico del secondo ordine.

1. Richiami sulle omografie vettoriali.

Due vettori, n e v_n , uscenti da uno stesso punto 0, si corrispondono in una omografia vettoriale quando le loro componenti rispetto ad una terna di assi 0, x , y , z sono legate da relazioni lineari del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} v_{nx} = a_{11} n_x + a_{12} n_y + a_{13} n_z \\ v_{ny} = a_{21} n_x + a_{22} n_y + a_{23} n_z \\ v_{nz} = a_{31} n_x + a_{32} n_y + a_{33} n_z \end{cases}$$

essendo le a_{ij} nove quantità costanti che definiscono la relazione nel sistema di riferimento prescelto.

Variando la terna di riferimento non varia il tipo di relazione che lega le componenti dei due vettori v_n e n : la linearità, infatti, delle relazioni del tipo (1) vale in qualunque sistema di riferimento, epperò rappresenta una proprietà « *intrinseca* » della relazione tra i due vettori. I nove coefficienti

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

si dicono componenti, rispetto al sistema di riferimento 0, x , y , z , del tensore caratteristico della omografia ¹⁾.

¹⁾ P. APPEL, *Traité de Mécanique rationnelle*. Paris, GauthierVillars.

Un tensore si dice simmetrico quando, tra le sue componenti rispetto ad un qualunque sistema di riferimento, valgono le relazioni

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{23} = a_{32}.$$

Tale simmetria è una proprietà caratteristica del tensore: essa vale, cioè, in qualunque altro sistema; in particolare esistono tre assi ortogonali ξ, η, ζ , tali che rispetto ad essi è

$$a_{12}^* = a_{21}^* = 0; \quad a_{13}^* = a_{31}^* = 0; \quad a_{23}^* = a_{32}^* = 0$$

avendo indicato con asterisco le componenti del tensore rispetto agli assi ξ, η, ζ , che si chiamano « assi principali » del tensore ²⁾.

2. *Corrispondenza tra il vettore \bar{v}_n ed il versore n che descrive un piano. Cerchio caratteristico.*

Sia dato un tensore simmetrico avente, rispetto alla terna $0, x, y, z$, le componenti

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

(con $a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{23} = a_{32}$).

Nella omografia caratterizzata da tale tensore si consideri la corrispondenza tra il versore \bar{n} , di componenti $\alpha_x, \alpha_y, 0$ (coseni direttori della retta n), e il vettore \bar{v}_n .

Dalle (1) si ricavano le espressioni delle componenti cartesiane v_{nx}, v_{ny}, v_{nz} di \bar{v}_n :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{nx} = a_{11} \cdot \alpha_x + a_{12} \cdot \alpha_y \\ v_{ny} = a_{21} \cdot \alpha_x + a_{22} \cdot \alpha_y \\ v_{nz} = a_{31} \cdot \alpha_x + a_{32} \cdot \alpha_y \end{array} \right.$$

Si considerino inoltre le due componenti normali di \bar{v}_n : sulla retta n

$$(3) \quad \sigma_n = v_{nx} \cdot \alpha_x + v_{ny} \cdot \alpha_y = a_{11} \alpha_x^2 + a_{22} \alpha_y^2 + 2 a_{12} \alpha_x \alpha_y$$

e sulla retta o , che segue di 90° la n nel piano x, y .

²⁾ La esistenza di questa terna principale per ogni tensore simmetrico può dimostrarsi facilmente attraverso l'esame della «quadrica caratteristica» del tensore. [Cfr. PERSICO, *Introduzione alla Fisica Matematica*. Bologna, Zanichelli, 1941].

$$(4) \quad \tau_n = v_{nx} \beta_x + v_{ny} \beta_y = a_{11} \alpha_x \beta_x + a_{22} \alpha_y \beta_y + \\ + a_{12} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x)$$

dove β_x, β_y sono i coseni direttori di o .

Indicando con φ l'angolo $\hat{x}n$, risulta

$$\alpha_x = \cos \varphi \quad \alpha_y = \sin \varphi \\ \beta_x = -\sin \varphi \quad \beta_y = \cos \varphi$$

e quindi

$$(5) \quad \sigma_n = a_{11} \cos 2\varphi + a_{22} \sin 2\varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_n = (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Eliminando φ tra le due espressioni precedenti, si ottiene, come è noto,

$$(6) \quad \left(\sigma_n - \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}^2$$

cioè l'equazione di un cerchio riferito agli assi σ, τ il cui centro C_z è ubicato sull'asse σ a distanza $\frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ dall'origine, e di raggio R fornito da

$$(7) \quad R^2 = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}^2.$$

Ad ogni retta n del fascio di centro O appoggiato al piano xy , corrisponde, sul cerchio, un punto $P_n (\sigma_n, \tau_n)$ le cui coordinate σ_n e τ_n rappresentano, secondo le (3) e (4) le componenti normali sulla retta n , rispettivamente, sulla retta o , del vettore \bar{v}_n corrispondente della stessa retta n nella omografia definita dal tensore di componenti a_{ij} assegnate.

La costruzione del cerchio relativo alle rette normali ad un asse z , è immediata: assegnate le componenti a_{ij} del tensore, sono note le coordinate di due punti diametralmente opposti. Si ha, infatti, dalle (3) e (4) per $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_x = a_{11}; \quad \tau_x = a_{12}; \quad \sigma_y = a_{22}; \quad \tau_y = -a_{12} \quad ^3)$$

³⁾ La relazione $\tau_x = a_{12} = -\tau_y$ nella teoria della elasticità, applicata alle componenti tangenziali del vettore tensione, si traduce nella nota proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



epperò partendo dai punti $P_x (\sigma_x, \tau_x)$ e $P_y (\sigma_y, \tau_y)$, (per i quali, essendo $\hat{x}\hat{y} = \frac{\pi}{2}$, risulta $\tau_x = -\tau_y$) si ottiene il centro C_z come punto medio del segmento $\overline{P_x P_y}$ (fig. 1). Volendo ricavare sul cerchio il punto $P_n (\sigma_n, \tau_n)$

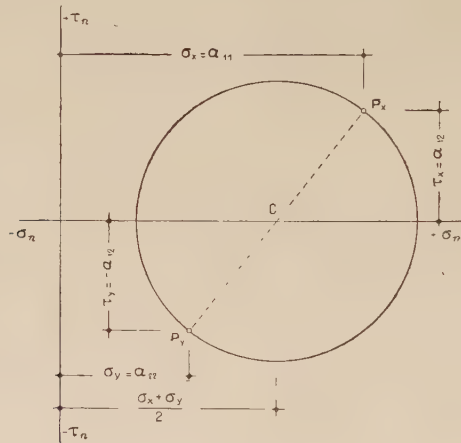


FIG. 1.

corrispondente ad una retta n definita da $\hat{x}\hat{n} = \varphi$, basta tracciare dal punto $P_x (\sigma_x, \tau_x)$ una retta r che formi con la verticale per P_x un angolo pari a φ (fig. 2). Il punto P_n sarà il simmetrico, rispetto all'asse σ , del

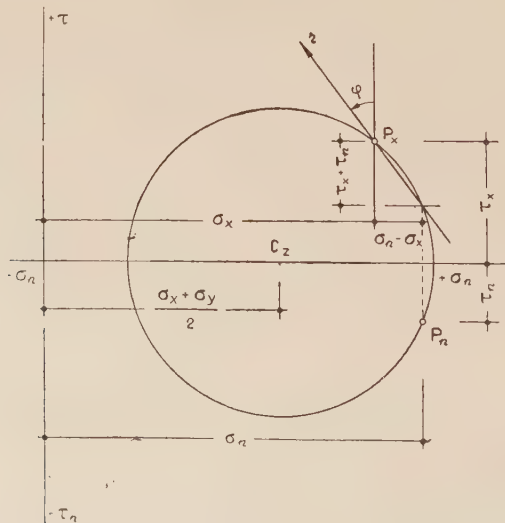


FIG. 2.

punto intersezione tra r e il cerchio. Tale costruzione è giustificata dalla relazione :

$$\frac{\sigma_n - \sigma_x}{\tau_n + \tau_x} + \frac{(a_{22} - a_{11}) \sin^2 \varphi + 2 a_{12} \sin \varphi \cos \varphi}{2 a_{12} \cos^2 \varphi + (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \left[\frac{(a_{22} - a_{11}) \sin \varphi + a_{11} \cos \varphi}{2 a_{12} \cos \varphi + (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi} \right] = \operatorname{tg} \varphi.$$

Analoga costruzione può servire per la determinazione del punto P_n (σ_n, τ_n) corrispondente ad una retta n definita da $\hat{x}n = \varphi$ a partire da un punto $P_{n'}$, ($\sigma_{n'}, \tau_{n'}$) corrispondente ad una retta n' definita da $\hat{x}n' = \varphi'$; questa volta l'angolo formato dalla retta r passante per $P_{n'}$ con la verticale sarà pari a $\hat{n}'n = \varphi - \varphi'$ (fig. 3).

Ciò si giustifica con la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n - \sigma_{n'}}{\tau_n + \tau_{n'}} &= \frac{a_{11}(\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi') + a_{22}(\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi') + 2a_{12}(\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi' \cos \varphi')}{(a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi' \cos \varphi' + a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi')} = \\ &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \varphi}{\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi'} \left[\frac{(a_{22} - a_{11}) \sin(\varphi + \varphi') + a_{12} \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi'}{\sin(\varphi - \varphi')}}{(a_{22} - a_{11}) \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')} + a_{12} \frac{\cos 2\varphi + \cos 2\varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')}} \right] = \\ &= \operatorname{tg}(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

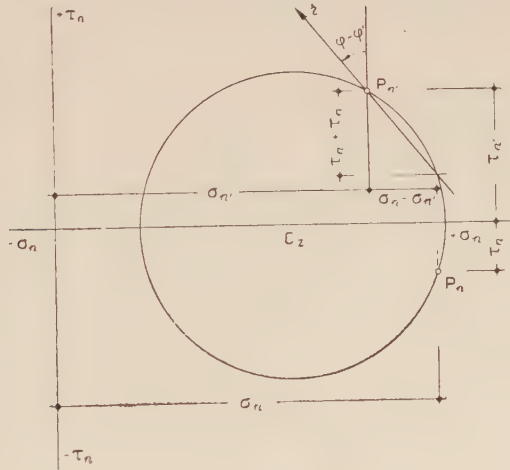


FIG. 3.

o, più semplicemente, osservando che dalla coppia di assi x, y dipende, non la posizione del centro e il raggio del cerchio, ma soltanto il punto P_x . E' sufficiente perciò una volta noto il cerchio e fissata una qualsiasi coppia di assi ortogonali s, t , effettuare la nostra costruzione a partire da un punto P_s avente come coordinate σ_s, τ_s e che sicuramente appartiene al cerchio.

3. *Corrispondenza tra il vettore \bar{v}_n ed il versore \bar{n} che ruota intorno ad uno degli assi principali, descrivendo un cono. Cerchio caratteristico.*

Le relazioni (1) si scrivano assumendo come terna di riferimento quella principale, 0, ξ , η , ζ . Essendo a^*_{11} , a^*_{22} , a^*_{33} le uniche componenti non nulle del tensore nel sistema di riferimento prescelto, le (1) risultano:

$$(8) \quad \begin{aligned} v_{n\xi} &= a^*_{11} \cdot \alpha_\xi \\ v_{n\eta} &= a^*_{22} \cdot \alpha_\eta \\ v_{n\zeta} &= a^*_{33} \cdot \alpha_\zeta \end{aligned}$$

e dalle (3) e (8) si ricava

$$(9) \quad \sigma_n = a^*_{11} \cdot \alpha_\xi^2 + a^*_{22} \alpha_\eta^2 + a^*_{33} \cdot \alpha_\zeta^2.$$

$$(10) \quad \sigma_n^2 + \tau_n^2 = v_{n\xi}^2 + v_{n\eta}^2 + v_{n\zeta}^2 = a_{11}^{*2} \alpha_\xi^2 + a_{22}^{*2} \cdot \alpha_\eta^2 + a_{33}^{*2} \alpha_\zeta^2.$$

Essendo τ_n la componente normale di \bar{v}_n sulla retta o ottenuta ruotando n di $\frac{\pi}{2}$ nel piano nv_n . Poichè è

$$\alpha_\zeta^2 = 1 - \alpha_\xi^2 - \alpha_\eta^2$$

le (9) e (10) possono scriversi:

$$(9') \quad \sigma_n = \alpha_\xi^2 (a^*_{11} - a^*_{33}) + \alpha_\eta^2 (a^*_{22} - a^*_{33}) + a^*_{33}$$

$$(10') \quad \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \alpha_\xi^2 (a_{11}^{*2} - a_{33}^{*2}) + \alpha_\eta^2 (a_{22}^{*2} - a_{33}^{*2}) + a_{33}^{*2}.$$

Eliminando α_η^2 tra queste due equazioni, sommando alla seconda la prima, moltiplicata per $-(a^*_{22} + a^*_{33})$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & [(a^*_{11} - a^*_{33}) - (a^*_{22} + a^*_{33}) \cdot (a^*_{11} - a^*_{33})] \alpha_\xi^2 + \\ & + a^*_{33} - a^*_{33} (a^*_{22} + a^*_{33}) = \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n (a^*_{22} + a^*_{33}) \end{aligned}$$

che, con le posizioni,

$$a = \frac{a^*_{22} + a^*_{33}}{2}; \quad e \quad b = (a^*_{11} - a^*_{22}) \cdot (a^*_{11} - a^*_{33})$$

può scriversi

$$(11) \quad (\sigma_n - n)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{a^*_{22} - a^*_{33}}{2} \right)^2 + b \alpha_\xi^2$$

che, per α_ξ — cost., cioè al ruotare di \bar{n} intorno all'asse ξ descrivendo un cono di apertura $\varphi_\xi = \arccos \alpha_\xi$, rappresenta, nel piano σ_n, τ_n , un cerchio avente centro ubicato sull'asse delle ascisse, a distanza « a » dall'origine, e raggio R'_ξ dato da

$$R'^2_\xi = b \alpha_\xi^2 + \left(\frac{a^*_{22} - a^*_{33}}{2} \right)^2.$$

Per $\alpha_\xi = 0$, il cono descritto da \bar{n} degenera nel fascio sul piano $\eta\zeta$, e il cerchio è del tipo introdotto al paragrafo precedente; la sua equazione si può ottenere dalla (6) sostituendo alle componenti del tensore a_{ij} rispetto alla terna generica $0, x, y, z$ quelle a^*_{ij} rispetto alla terna principale ξ, η, ζ . Per $|\alpha_\xi|$ compreso tra i valori limiti 0 e 1, la (11) fornisce una famiglia di cerchi concentrici aventi il centro coincidente con quello del cerchio relativo al fascio normale a ξ . Con sostituzione di indici si ottengono le equazioni delle tre famiglie di cerchi, relative ai coni aventi per assi le direzioni principali:

$$\begin{aligned} \xi) : \left(\sigma_n - \frac{a^*_{22} + a^*_{33}}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{a^*_{22} - a^*_{33}}{2} \right)^2 + (a^*_{11} - a^*_{22})(a^*_{11} - a^*_{33}) \alpha_\xi = R'^2_\xi \\ (12) \quad \eta) : \left(\sigma_n - \frac{a^*_{11} + a^*_{33}}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{a^*_{11} - a^*_{33}}{2} \right)^2 + (a^*_{22} - a^*_{11})(a^*_{22} - a^*_{33}) \alpha_\eta = R'^2_\eta \\ \zeta) : \left(\sigma_n - \frac{a^*_{11} + a^*_{22}}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &= \left(\frac{a^*_{11} - a^*_{22}}{2} \right)^2 + (a^*_{33} - a^*_{11})(a^*_{33} - a^*_{22}) \alpha_\zeta = R'^2_\zeta. \end{aligned}$$

Supponendo $a_{33} < a_{22} < a_{11}$, e indicando con R_ξ, R_η, R_ζ , i raggi dei tre cerchi relativi ai fasci di rette normali alle tre direzioni principali, dati dalle (7):

$$R_\xi = \frac{a^*_{22} - a^*_{33}}{2}$$

$$R_\eta = \frac{a^*_{11} - a^*_{33}}{2}$$

$$R_\zeta = \frac{a^*_{11} - a^*_{22}}{2}$$

si ricavano immediatamente dalle (12) i valori estremi per il raggio R' di ciascuna famiglia di cerchi concentrici, in corrispondenza dei valori $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
 R_{\xi} &\leq R'_{\xi} \leq \overline{C_{\xi}P_{\xi}} \\
 \overline{C_{\eta}P_{\eta}} &\leq R'_{\eta} \leq R_{\eta} \\
 R_{\zeta} &\leq R'_{\zeta} \leq \overline{C_{\zeta}P_{\zeta}}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

avendo indicato (fig. 4) con C_j il centro dei cerchi relativi all'asse j , e con P_{ξ} , P_{η} , P_{ζ} , gli estremi dei segmenti ottenuti riportando dall'origine 0 le lunghezze $\overline{OP_{\xi}} = a^*_{11}$; $\overline{CP_{\eta}} = a^*_{22}$; $\overline{OP_{\zeta}} = a^*_{33}$ ⁴⁾.

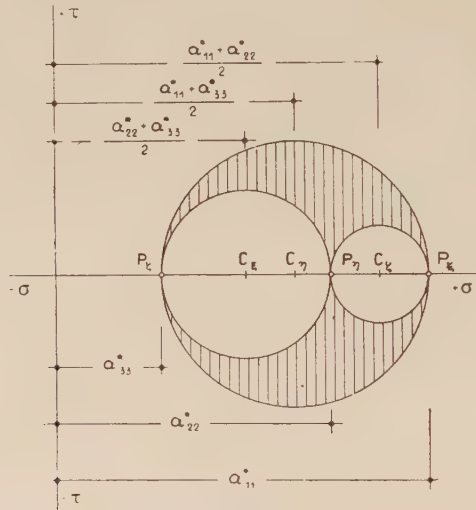


FIG. 4.

A partire dalla conoscenza delle componenti del tensore secondo la terna principale

$$a^*_{11} = \sigma_{\xi} \quad a^*_{22} = \sigma_{\eta} \quad a^*_{33} = \sigma_{\zeta}$$

è immediata la costruzione dei tre cerchi di centro C_j e raggio R_j relativi alle rette del fascio normale all'asse j ($j = \xi, \eta, \zeta$). (Fig. 4).

Il punto P_{η} corrispondente ad una generica retta dello spazio uscente da 0, di coseni direttori α_{ξ} , α_{η} , α_{ζ} , si ricava considerando che esso deve trovarsi contemporaneamente sul cerchio relativo alle rette del cono avente

⁴⁾ Dall'equazione del cerchio relativo al cono di asse ξ , per esempio, per $\alpha_{\xi} = 1$ risulta:

$$\begin{aligned}
 R_{\xi}^2 &= \left(\frac{a^*_{22} - a^*_{33}}{2} \right) + a^{*2}_{11} + a^*_{22} a^*_{33} - a^*_{11} a^*_{33} - a^*_{11} a^*_{22} = a^{*2}_{11} + \\
 &+ \left(\frac{a^*_{22} + a^*_{33}}{2} \right)^2 - a^*_{11} (a^*_{22} + a^*_{33}) = \left(a^*_{11} - \frac{a^*_{22} + a^*_{33}}{2} \right) = \overline{C_{\xi}P_{\xi}}^2.
 \end{aligned}$$

per asse ξ e per apertura $\varphi_\xi = \arccos \alpha_\xi$, sul cerchio relativo alle rette del cono avente per asse η e per apertura $\varphi_\eta = \arccos \alpha_\eta$, e sul cerchio del cono di asse ζ e apertura $\varphi_\zeta = \arccos \alpha_\zeta$. (Una delle tre condizioni è evidentemente superflua e può servire quale controllo del procedimento grafico).

Ciascuno dei tre cerchi relativi ai coni di asse j e apertura φ_j può tracciarsi essendo ormai noto il centro C_j , calcolando dalle (12), in funzione di a_j , il raggio R'_j , o determinando con la costruzione esposta al paragrafo 2 (figg. 2 e 3) il punto P corrispondente alla retta del fascio contenuto nel piano jk formante con j l'angolo φ_j . Tale punto infatti oltre che sul cerchio relativo al fascio nel piano jk , deve anche trovarsi sul cerchio relativo al cono di asse j e apertura φ_j che si vuole tracciare. Sarà perciò $R'_j = \overline{C_j P}$. Si deduce immediatamente, osservando le (13), che solo la zona tratteggiata in figura 4 è comune a tutte e tre le famiglie di cerchi relative ai coni intorno agli assi principali: potendosi da ciò affermare che il punto P_n corrispondente ad una qualunque retta della stella da 0, sarà sempre non esterno al cerchio massimo (di centro C_η) e non interno ai cerchi minori di centro C_ξ e C_ζ .

4. Applicazioni alla teoria della elasticità. Cerchi della tensione (o di MOHR). Cerchi della deformazione.

In un punto 0 interno d'un corpo continuo soggetto e forze superficiali, le sei componenti speciali di tensione

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array}$$

possono riguardarsi come le componenti, rispetto alla terna $0, x, y, z$, del tensore caratteristico della omografia vettoriale che fa corrispondere al vettore \bar{n} , uscente da 0 il vettore \bar{t}_n (tensione sull'elementino piano per 0 avente la normale diretta e orientata come \bar{n})⁵⁾. Ciò in base alla linearità delle relazioni (equazioni di CAUCHY).

$$(2_1) \quad \begin{cases} t_{nx} = \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ t_{ny} = \tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ t_{nz} = \tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{cases}$$

⁵⁾ Per l'orientamento della normale ad un elementino piano si considera positivo il verso che conduce dall'elementino stesso verso l'esterno, cioè verso il corpo rimosso.

tra le componenti del versore \bar{n} ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) e del vettore \bar{t}_n (t_{nx}, t_{ny}, t_{nz}). Ciò permette di ricavare l'equazione del cerchio di MOHR, relativo agli elementi piani appartenenti ad un fascio di asse z , sostituendo nella (6) alle componenti del tensore α_{ij} , le componenti speciali di tensione. Le componenti σ_n, τ_n assumono il significato fisico di tensione normale e tangenziale sull'elementino piano per 0 di normale n , definita dai coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, 0$. L'equazione del cerchio di MOHR si scrive:

$$(6_1) \quad \left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2.$$

Assumendo come terna di riferimento quella principale, ed essendo

$$a_{11}^* = \sigma_\xi; \quad a_{22}^* = \sigma_\eta; \quad a_{33}^* = \sigma_\zeta; \quad a_{12}^* = a_{13}^* = a_{23}^* = 0$$

la (6₁) diventa:

$$(6'_1) \quad \left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2.$$

essendo σ_n e τ_n le componenti della tensione agente sugli elementini aventi la normale nel piano ξ, η .

L'equazione (11) del cerchio relativo agli elementini piani le cui normali descrivono intorno all'asse ξ un cono di apertura $\varphi_\xi = \arccos \alpha_\xi$ si scrive:

$$(11_1) \quad \left(\sigma_n - \frac{\sigma_\eta + \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_\eta - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + (\sigma_\xi - \sigma_\eta)(\sigma_\xi - \sigma_\zeta) \alpha_\xi^2.$$

Automaticamente si estendono al vettore \bar{t}_n e cioè al tensore di componenti σ_i, τ_{ij} le equazioni (12), relative alle tre famiglie di cerchi corrispondenti ai coni con assi lungo ξ, η, ζ , e le costruzioni grafiche di cui ai paragrafi 2 e 3, per la determinazione della tensione agente su un elementino la cui normale sia assegnata attraverso i coseni direttori.

E' da osservare che la tensione τ_n che compare nella (6'₁) è tutta la tensione tangenziale relativa all'elementino di normale n : dalla (8) risulta infatti

$$t_{n\zeta} = \tau_{n\zeta} = 0$$

essendo $\alpha_\zeta = 0$ per tutti gli elementi del fascio di asse ζ . Ciò che permette di scrivere la relazione

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = t_{n\xi}^2 + t_{n\eta}^2 + t_{n\zeta}^2$$

corrispondente alla (10).

Lo stesso non può dirsi per la τ_n che compare nella (6₁): l'essere $\alpha_z = 0$ infatti, non comporta necessariamente l'annullarsi dell'altra componente tangenziale τ_{nz} .

Si considerino le sei quantità

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{1} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{array}$$

dove con $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, si indicano i coefficienti di dilatazione lineare lungo le tre direzioni coordinate, e con γ_{ij} la variazione del minore tra i due angoli formati dalle rette i e j , positiva se corrisponde ad una diminuzione. Esse possono riguardarsi come le componenti, rispetto alla terna $0, x, y, z$ del tensore caratteristico della omografia vettoriale che fa corrispondere al versore \bar{n} , uscente da 0 , il vettore \bar{s}_n che rappresenta lo spostamento dovuto alla deformazione pura di un punto della retta n posto a distanza unitaria da 0 . Risulta infatti, indicando con u, v, w , le componenti secondo x, y, z dello spostamento s del punto a distanza unitaria da 0 , posto sulla retta n di coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

$$(2_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varepsilon_x \cdot \alpha_x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \alpha_y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \alpha_z \\ v = \frac{1}{2} \gamma_{yx} \alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \alpha_z \\ w = \frac{1}{2} \gamma_{zx} \alpha_x + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{array} \right.$$

In perfetta analogia a quanto fatto per le tensioni, si possono ricavare le equazioni corrispondenti alle (6₁), (6'₁) e (11₁), con la semplice sostituzione delle componenti del tensore degli sforzi con le componenti del tensore delle deformazioni: ⁶⁾

⁶⁾ Le componenti σ_n e τ_n del vettore s_n rappresentano rispettivamente, come è facile ricavare attraverso le (5) scritte in corrispondenza del tensore deformazione, il coefficiente di dilatazione lineare ε_n lungo una retta n , e la metà della variazione dell'angolo $\hat{n}\hat{o}$, tra le rette orientate, positiva se corrisponde ad una diminuzione; variazione che indicheremo con γ_n , essendo univocamente determinata in direzione e verso la retta o , come detto sopra, appena fissata la n .

$$(6_2) \quad \left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

$$(6'_2) \quad \left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta}{2} \right)^2$$

$$(11_2) \quad \left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_\eta - \varepsilon_z}{2} \right)^2 + (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta) \cdot (\varepsilon_\xi - \varepsilon_z) \alpha_\xi^2$$

che si riferiscono rispettivamente al cerchio relativo alle rette del piano xy , al cerchio relativo alle rette del piano $\xi\eta$, e al cerchio relativo alle rette del cono avente asse ξ e apertura $\varphi_\xi = \arccos \alpha_\xi$.

Sia dato uno stato tensionale piano e assegnate le componenti riferite agli assi x, y del tensore degli sforzi:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy}.$$

Il cerchio delle tensioni relativo agli elementi piani le cui normali descrivono il fascio avente a sostegno il piano xy , avrà l'equazione (6₁):

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

e riferito agli assi principali (risulta evidentemente $\zeta \equiv z$):

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2} \right)^2.$$

Il cerchio delle deformazioni relativo alle rette giacenti sul piano xy , avrà l'equazione

$$\left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

e riferito agli assi principali

$$\left(\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta}{2} \right)^2$$

Applicando le relazioni

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_{\eta}}{m} \right); \quad \varepsilon_{\eta} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_{\xi}}{m} \right)$$

risulta

$$\frac{\frac{\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}}{2}}{\frac{\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}}{2}} = \frac{E m}{m - 1}; \quad \frac{\frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2}}{\frac{\varepsilon_{\xi} - \varepsilon_{\eta}}{2}} = \frac{E m}{m + 1}$$

da cui si deducono le modalità per il passaggio dal cerchio delle tensioni a quello delle deformazioni, e viceversa, nel caso di stato tensionale piano.

Sovrapposti i piani σ_n , τ_n e $E\varepsilon_n$, $E \frac{\gamma_n}{2}$, basta, per tracciare il cerchio

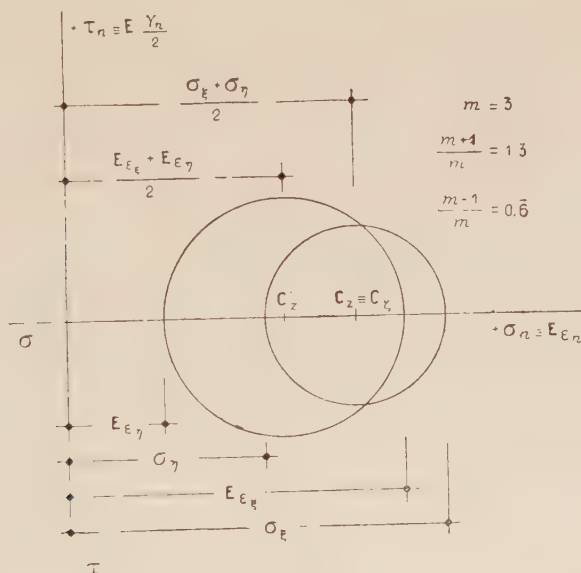


FIG. 5.

delle deformazioni quando sia noto quello delle tensioni (o viceversa) moltiplicare (o dividere) il raggio per il coefficiente $\frac{m+1}{m}$, e l'ascissa del centro per l'altro coefficiente $\frac{m-1}{m}$ (fig. 5).

Una utile applicazione di quanto su esposto si presenta nella determinazione sperimentale dello stato tensionale in una lastra soggetta a forze contenute nel proprio piano.

La misura delle componenti ε_x , ε_y , γ_{xy} della deformazione relative ad una coppia x, y di assi contenuti nel piano della lastra è affidata generalmente ad estensimetri elettrici (strain-gauges) ⁷⁾.

Noto il cerchio della deformazione, è possibile, come mostrato in figura 5, passare immediatamente al cerchio della tensione che risolve

⁷⁾ Pur non essendo impossibile misurare lo scorrimento tra due assi ortogonali, si preferisce generalmente aggiungere un terzo estensimetro secondo una

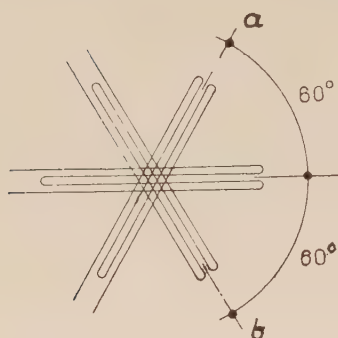


FIG. 6.

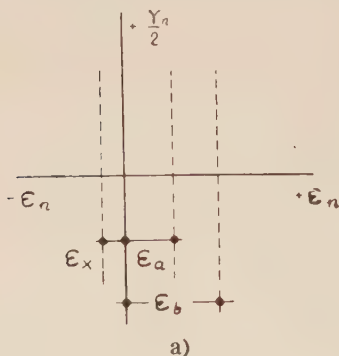
direzione qualunque, o piazzare i tre estensimetri in modo che gli assi longitudinali formino tra loro angoli uguali. ("Rosette strain gauges.") (fig. 6).

Note ε_a , ε_b , ε_x , è possibile ricavare ε_y , γ_{xy} attraverso il sistema di due equazioni

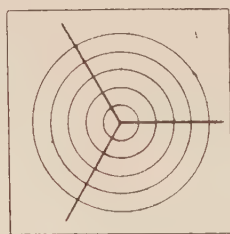
$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \gamma_{xy} \alpha_x \alpha_y$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \beta_x^2 + \varepsilon_y \beta_y^2 + \gamma_{xy} \beta_x \beta_y$$

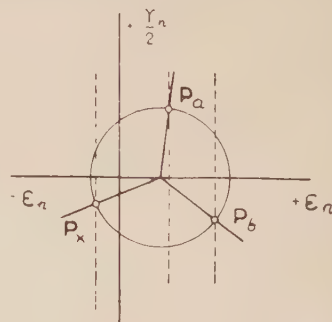
oppure si può disegnare il cerchio della deformazione cercandone per tentativi il raggio e il centro, a partire dalle ascisse note di tre punti relativi a rette



a)



b)



c)

formanti tra loro angoli ugualmente noti. Basta segnare sugli assi ε , $\frac{\gamma}{2}$ le tre linee verticali a, b, x , distanti dall'origine rispettivamente $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_x$ come mostrato in a). I tre punti corrispondenti alle tre rette a, b, x dovranno trovarsi sul cerchio e ciascuno sulla corrispondente verticale. Essi inoltre divideranno il cerchio in tre archi uguali. Disegnati, su carta trasparente, una serie di cerchi concentrici, e tre linee radiali a 120° uscenti dal centro (b), si sovrapponga alla figura a) con il centro sull'asse orizzontale, e si ricerchi per tentativi la posizione per cui le tre linee radiali intersecano le tre linee verticali sullo stesso cerchio. Questo dà direttamente il cerchio cercato (fig. c). (F. R. SHANLEY, *Strength of Materials*. New York, Mc Graw Hill Book Co. Inc., 1957. - J. RICALDONI, *Curso de Analisis experimental de Estructuras*. Montevideo, 1957).

completamente il problema della conoscenza dello stato tensionale nel punto. E' ovvia la osservazione che adottando il criterio di GRASHOF, basterà per la verifica della resistenza che il maggiore tra i cerchi della deformazione relativi ai piani principali, tracciato nel piano $E\varepsilon$, $E \frac{\gamma}{2}$, sia interno alla fascia limitata dalle rette verticali per le ascisse $E \frac{\varepsilon_R}{s}$, $\frac{E\varepsilon_R}{s}$ essendo s il coefficiente di sicurezza.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Gennaio 1958.

UN' OSSERVAZIONE SUI GRUPPI FINITI p -RISOLUBILI

Nota del dott. Giovanni Zacher *)

presentata dal socio corrispondente G. Scorza Dragoni

(Adunanza del dì 5 aprile 1958)

Sunto. — Si estende un teorema dato da T. IKUTA per i gruppi risolubili finiti ai gruppi p -risolubili finiti.

Nella presente nota si estende ai gruppi finiti p -risolubili ¹⁾ un teorema dimostrato da T. IKUTA ²⁾ per i gruppi risolubili d'ordine finito. Se $N \subset M$ sono due sottogruppi normali di G tali che tra loro non esiste nessun sottogruppo normale diverso da essi stessi, allora M/N dicesi un fattore principale di composizione di G . Seguendo IKUTA, il gruppo M/N sarà detto p -centrale se è un p -gruppo contenuto nel centro di G/N e p -eccentrico se è p -gruppo non contenuto nel centro di G/N .

E' facile rendersi conto che due serie principali di composizione di G hanno lo stesso numero di p -fattori centrali e di p -fattori eccentrici.

Dimostriamo ora le seguenti proprietà:

1) Sia G un gruppo d'ordine finito e sia $\Phi(G)$ il sottogruppo di FRATTINI di G . Sia M un sottogruppo normale di G che contenga un sottogruppo N , normale in G , contenuto in $\Phi(G)$ e che abbia indice in M primo col proprio ordine. Allora N ha un complemento normale C in M .

Il gruppo N ha un complemento C in M e tutti i complementi di N in M sono coniugati tra loro, essendo N un gruppo speciale. Ne segue che se g è un qualunque elemento di G , esiste sempre un elemento m di M per cui si ha $gCg^{-1} = mCm^{-1}$, il che ci dice che g appartiene a $m\mathfrak{N}(C) \subset N \subset \mathfrak{N}(C) = N\mathfrak{N}(C)$ ³⁾. Pertanto $G = N\mathfrak{N}(C)$, il che implica $\mathfrak{N}(C) = G$, essendo $N \subseteq \Phi(G)$.

*) Questa Nota fu scritta mentre l'Autore usufruiva di una borsa di studio dell'ICA per un programma amministrato dall'Accademia Nazionale delle Scienze Americane.

¹⁾ Un gruppo finito dicesi p -risolubile se ogni fattore principale è potenza del numero primo p , o primo con p .

²⁾ T. IKUTA: *On series of maximal non normal subgroups in a soluble group*. Reports of the Liberal Arts Faculty, Shizuoka Univ., n. 1 (1950).

³⁾ $\mathfrak{N}(C)$ indica il normalizzante di C in G .

II) Sia ⁴⁾ G un gruppo finito, N un p -gruppo normale di G ed H un sottogruppo di G per cui $G = N \cup H$. Se $N \cap H$ è normale in G e se si considera una serie principale di composizione, α , di H ed una, β , di G che passa per N ed $N \cap H$, allora i fattori principali di composizione di β che stanno tra G ed N, $N \cap H$ ed 1 si possono porre in corrispondenza biunivoca con quelli di α in modo che elementi corrispondenti siano isomorfi, nonchè simultaneamente centrali o simultaneamente eccentrici.

Notiamo anzitutto che se M è un sottogruppo normale minimo di G, tale è pure H se è $M \subseteq N$. Infatti se $M \cap N = 1$, allora $M \cup N = M \times N$ e quindi ogni sottogruppo normale di H contenuto in M è tale anche in $G = N \cup H$. Sia invece $M \cap N \neq 1$; sarà allora $M \subset N$. Ma allora M è contenuto nel centro di N, per cui ogni sottogruppo F di M è normale in N, e quindi in G se tale è in H. Dalla relazione $G = N \cup H$ segue che $G/N \simeq \frac{H}{N \cap H}$. Consideriamo quella parte di una serie principale di G che passa per $N \cap H$, che va da $N \cap H$ ad 1: sia essa $N_0 = N \cap H \supset N_1 \supset \dots \supset N_k = 1$. Nel gruppo G/N_i ($i = 1, 2, \dots, k$) si ha $G/N_i = N_0/N_i \cup H/N_i$, $\frac{N_{i-1}}{N_i}$ normale minimo di G/N_i e contenuto in H/N_i . Quindi $\frac{N_{i-1}}{N_i}$ è pure normale minimo di H/N_i . Tenendo ora conto che $G/N \simeq \frac{H}{H \cap N}$, la conclusione consegue facilmente.

III) Sia G un gruppo p -risolubile. Se tutti i p -sottogruppi normali minimi di $G/\Phi(G)$ sono contenuti nel centro di $G/\Phi(G)$, allora G contiene un sottogruppo normale d'ordine primo con p .

Essendo $\Phi(G)$ speciale, se l'ordine di $\Phi(G)$ è divisibile per un numero q primo con p , la proposizione è dimostrata. Sia dunque $\Phi(G)$ un p -gruppo. Indichiamo con $N/\Phi(G)$ il gruppo, unione di tutti i p sottogruppi normali minimi di $G/\Phi(G)$. Dato che in $G/\Phi(G)$ il sottogruppo di FRATTINI è identico, il gruppo $N/\Phi(G)$ ha complemento in $G/\Phi(G)$ che sarà normale in quanto per ipotesi $N/\Phi(G)$ è nel centro di $G/\Phi(G)$. Se $M/\Phi(G)$ è un sottogruppo normale minimo di $C/\Phi(G)$, il suo ordine è primo con p ed M è normale in G. Pertanto $\Phi(G)$ ha il suo indice in M primo col suo ordine per cui, per la prop. I, $M = \Phi(G) \times T$ e T è normale in G con ordine primo con p .

Proviamo ora il seguente teorema: *Se G è un gruppo finito p -risolubile, se $p^{z_1}, p^{z_2}, \dots, p^{z_s}$ sono gli ordini di tutti i p -fattori principali eccentrici di una serie principale di composizione di G, mentre quelli centrali sono in numero di h , allora esiste una catena di sottogruppi*

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_s \supset H_{s+1} \supset \dots \supset H_{s+h}$$

⁴⁾ Questa prop. in forma leggermente diversa si trova già nel lavoro di IKUTA.

con le seguenti proprietà:

- 1) H_i è massimo in H_{i-1} per $i = 1, 2, \dots, s + h$;
- 2) H_i non è normale in H_{i-1} per $i = 1, 2, \dots, s$;
- 3) Gli indici $H_i : H_{i+1}$ per $i = 0, 1, \dots, s - 1$ coincidono, a meno dell'ordine, con gli s numeri $p^{\alpha_1}, \dots, p^{\alpha_s}$;
- 4) $H_j : H_{j+1} = p$ per $j > s$;
- 5) H_j è normale in H_s per $j > s$;
- 6) H_{s+h} ha ordine primo con p .

Poichè il teorema è vero se G è un p -gruppo, procediamo per induzione rispetto all'ordine di G . Se G contiene un sottogruppo normale minimo N d'ordine primo con p , i p -fattori principali di G coincidono con quelli di G/N , epperò il teorema risulta allora provato in virtù dell'ipotesi d'induzione. Possiamo dunque supporre che tutti i sottogruppi normali minimi di G siano p -gruppi.

Consideriamo $\Phi(G)$; poichè $\Phi(G)$ è speciale, nel nostro caso $\Phi(G)$ sarà un p -gruppo, eventualmente identico. Il gruppo $G/\Phi(G)$ non può avere tutti i sottogruppi normali minimi centrali in virtù della prop. III. Sia $N/\Phi(G)$ dunque uno non centrale. $N/\Phi(G)$ ha complemento in $G/\Phi(G)$ essendo $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$. Sia dunque $\frac{NH}{\Phi(G)} = \frac{G}{\Phi(G)}$, con $N \cap H = \Phi(G)$.

Il gruppo H non è normale in G , perchè altrimenti $N/\Phi(G)$ sarebbe centrale, ed è un sottogruppo massimo di G . Il gruppo H , per la prop. II, ha gli stessi fattori principali di composizione di G/N e di $N \cap H = \Phi(G)$. Inoltre i fattori principali di composizione di G si ottengono da quelli citati aggiungendo $N/\Phi(G)$. Ma $N : \Phi(G) = G : H$. Per l'ipotesi d'induzione, H ammette una catena di sottogruppi che soddisfa alle condizioni del teorema. Sia essa $H = H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_s \supset H_{s+1} \supset \dots \supset H_{s+h}$. Per quanto precede, la catena $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_{s+h}$ soddisfa alle condizioni desiderate.

ALCUNE OSSERVAZIONI SUI PROBLEMI DI MAYER-LAGRANGE
PER GLI INTEGRALI SEMPLICI IN FORMA ORDINARIA

Nota del dott. Carlo Ciliberto
presentata dal socio Carlo Miranda

[Adunanza del dì 3 maggio 1958]

Sunto. — Vengono svolte alcune osservazioni intorno ai problemi di cui è detto nel titolo e dei quali l'A. si è già occupato in un recente lavoro.

In un recente lavoro ¹⁾, che nel seguito indicherò con il riferimento [A], ho stabilito un teorema di esistenza per il seguente problema di minimo: si abbia il sistema differenziale:

$$(I) \quad \begin{cases} u'_i(x) = f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \dots, u_n(x)], & a \leq x \leq b, \\ u_i(a) = \mu_i, \end{cases}$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, e supposto che esso ammetta una soluzione $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ per ogni fissata curva C di equazione $y = y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua in (a, b) , trovare sotto quali condizioni per la funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ e per le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, esiste il minimo assoluto del funzionale

$$\Phi[u_1(b), \dots, u_n(b)],$$

al variare di C in una fissata classe di curve e di $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ in un assegnato insieme.

Nella presente nota prendo in considerazione il caso in cui, detti s_0, s_1, \dots, s_h , $h + 1$ interi tali che

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_h = n,$$

si supponga che ogni funzione $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ del sistema (I) con $i \leq s_p$ sia indipendente da tutte le variabili u_i per cui è $i > s_p$, e ciò per tutti i valori di p da 1 ad $h - 1$. Ciò allo scopo di dimostrare che analoga-

¹⁾ C. CILIBERTO. *Problemi di Mayer-Lagrange per gli integrali semplici in forma ordinaria*. Rendic. Semin. Matem. Univ. Padova (in corso di stampa).

mente a quanto avviene nella trattazione della questione data da L. M. GRAVES ²⁾, è possibile in questo caso particolare una notevole riduzione delle ipotesi concernenti le f_i .

Il risultato principale di questa nota è contenuto nel n. 4 e si concreta in un nuovo teorema di semicontinuità e di chiusura. I nn. 1, 2 e 3 sono dedicati alla dimostrazione di alcuni teoremi preliminari.

Aggiungo che per semplicità di esposizione presuppongo nota al lettore la memoria [A], alla quale rimando sempre che sia possibile.

1. Siano $f_i(x, y, y', v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue, insieme alle loro derivati parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \dots, n$, per ogni (x, y) di un campo A, ogni y' finito, per ogni punto (v_1, \dots, v_p) appartenente ad un campo rettangolare (limitato o non) T, aventi i lati paralleli agli assi coordinati, e per ogni punto (u_1, \dots, u_n) appartenente ad un dominio rettangolare (limitato o non) D, avente i lati paralleli agli assi coordinati.

Posto $(v_1, \dots, v_p) \equiv v$, per il seguito converremo di indicare sempre le su considerate funzioni con $f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Supporremo, poi, che tali funzioni verifichino le seguenti ipotesi:

a) detta R una costante positiva ed α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, n fissati numeri positivi sia:

$$\frac{f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_{k+1}, \dots, u_n) - f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \dots, u_n)}{u_k^{(1)} - u_k^{(2)}} \leq R[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \dots, u_n)|], \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' , per v appartenente a T e per $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ e $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ appartenenti a D, con $u_k^{(1)} > u_k^{(2)}$;

b) ciascuna funzione $f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, è non decrescente rispetto a ciascuna variabile v_1, v_2, \dots, v_p e rispetto a ciascuna variabile u_h , con $h \neq i$ per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' , per v appartenente a T e (u_1, \dots, u_n) appartenente a D;

c) esista un numero N tale da aversi:

$$f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) \geq N, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' , per tutti i punti v appartenenti a T e per tutti i punti (u_1, \dots, u_n) di D;

d) ad ogni parte limitata A' del campo A, possono sempre farsi cor-

²⁾ L. M. GRAVES. *The existence of an extremum in problems of Mayer*. Transactions of the Americ. Mathem. Soc. vol. 39 (1936), p. 436, n. 2.

rispondere due numeri positivi μ e Y_1 , in modo che, per tutti i punti (x, y) di A' , per tutti gli y' soddisfacenti alla disuguaglianza $|y'| > Y_1$, per tutti i punti v di T e per tutti i punti (u_1, \dots, u_n) di D , risulti:

$$f_i(x, y', y, v, u_1, \dots, u_n) \geq \mu |y'|^{1+\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove gli α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono i numeri positivi fissati in a);

e) per qualsiasi punto (x, y) di A , per tutti i valori finiti di y e y'_1 , per tutti i punti v di T e per tutti i punti (u_1, \dots, u_n) di D si abbia:

$$E_i(x, y, y', y'_1; v, u_1, \dots, u_n) = f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) + \\ - \left[f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) + (y'_1 - y') \frac{\partial}{\partial y'} f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) \right] \geq 0,$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

Sia C una curva di equazione:

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

con $y(x)$ assolutamente continua in (a, b) , e tale che per $x \in (a, b)$ il punto $(x, y(x)) \in A$; una tale curva la diremo *ammissibile*.

Sia C una curva ammissibile e siano, poi, v_i , $i = 1, 2, \dots, p$, p numeri reali tali che il punto $V \equiv (v_1, \dots, v_p)$ appartenga a T . Consideriamo lo spazio Σ di tutte le coppie (C, V) ; gli elementi di tale spazio li indicheremo con τ . Supponiamo che sia stata assegnata una trasformazione funzionale in base alla quale ad ogni elemento τ di una certa classe \mathcal{C} di elementi di Σ corrispondono ³⁾ p funzioni $v_1(x; \tau), \dots, v_p(x; \tau)$, assolutamente continue in (a, b) , intervallo in cui C è definita, e per le quali è $v_i(a) = v_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, e per tutti gli $x \in (a, b)$ è $(v_1(x; \tau), \dots, v_p(x; \tau)) \in T$.

Porremo per semplicità di notazione $v(x; \tau) \equiv (v_1(x; \tau), \dots, v_p(x; \tau))$. Per $v_i(x; \tau)$, $i = 1, 2, \dots, p$, intenderemo data la medesima definizione di semicontinuità inferiore che è stata data ⁴⁾ per $u_i(x; \omega)$ nel lavoro [A]. Spesso per semplicità indicheremo $v(x, \tau)$ con $v(x)$.

Siano, ora, μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, n numeri reali tali che il punto $M \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n)$ appartenga a D . Consideriamo lo spazio di tutte le coppie (τ, M) . Indicheremo con Ω_1 tale spazio e con ω_1 il suo generico elemento. Diremo *elemento ordinario* di Ω_1 , ogni elemento $\omega_1 \equiv (\tau, M)$, con τ

³⁾ Osserviamo che non è escluso che ad un fissato elemento τ di \mathcal{C} , nella assegnata trasformazione funzionale, corrisponda più di un gruppo di p funzioni $v_1(x; \tau), \dots, v_p(x; \tau)$.

⁴⁾ Cfr. lavoro cit. in ¹⁾, n. 3.

appartenente alla classe \mathcal{C} , tale che il sistema differenziale:

$$(1) \quad u_i'(x) = f_i[x, y(x), y'(x), v(x), u_1(x), \dots, u_n(x)], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ammetta una soluzione costituita da una n -upla di funzioni $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ assolutamente continue in (a, b) , verificanti le relazioni

$$(2) \quad u_i(a) = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e tali che per tutti gli $x \in (a, b)$ sia $(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in D$. Rileviamo che le funzioni $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, possono considerarsi come dei funzionali dipendenti da ω_1 ; per porre in rilievo ciò una soluzione ⁵⁾ del sistema (1), (2) la indicheremo con la seguente n -upla di simboli $\{u_1(x; \omega_1), \dots, u_n(x; \omega_1)\}$.

Considerata una classe \mathcal{K} di elementi ordinari $\omega_1 \equiv (\tau, M)$, diremo che i funzionali $u_i(x; \omega_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono nella classe \mathcal{K} uniformemente semicontinui inferiormente su un elemento $\omega_{10} \equiv (\tau_0, M_0)$, con $\tau_0 \equiv (C_0, V_0)$, $V_0 \equiv (v_{10}, \dots, v_{p0})$ e $M_0 \equiv (\mu_{10}, \dots, \mu_{n0})$, se preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\rho > 0$, in modo che per ogni elemento $\omega_1 \equiv (\tau, M)$ di \mathcal{K} per il quale la curva C appartiene propriamente all'intorno ⁶⁾ (ρ) della C_0 e V e M sono tali che

$$(3) \quad v_i - v_{i0} > -\rho, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$(4) \quad \mu_i - \mu_{i0} > -\rho, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

indicati rispettivamente con (a, b) e (a_0, b_0) gli intervalli in cui sono definite C e C_0 , si abbia:

$$(5) \quad u_i(x; \omega_1) > u_i(x; \omega_{10}) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

in tutti i punti $x \in (a, b) \cap (a_0, b_0)$,

$$(6) \quad u_i(x; \omega_1) > u_i(a_0; \omega_{10}) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x < a_0$, e

$$(7) \quad u_i(x; \omega_1) > u_i(b_0; \omega_{10}) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x > b_0$.

⁵⁾ Osserviamo che non è escluso che per un fissato elemento ordinario ω_1 il sistema differenziale (1), (2) ammetta più di una soluzione. Vedremo, però, in seguito, precisamente nel n. 2, che se le funzioni $f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, oltre a verificare le ipotesi a), b), c), e d) soddisfano anche l'ipotesi f) o l'ipotesi g), indicate nel n. 2, allora il sistema (1), (2) ammette una sola soluzione per ogni fissato elemento ordinario.

⁶⁾ Per la definizione di intorno (ρ) di una curva continua cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, vol. I, pag. 72 Bologna, Zanichelli (1921). Tale definizione trovasi riportata anche nella nota ⁽¹¹⁾ di [A].

Per semplicità di notazione nel seguito indicheremo $u_i(x; \omega_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, e $u_i(x; \omega_{i0})$, $i=1, 2, \dots, n$, rispettivamente con $u_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, e $u_{i0}(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, ragion per cui le (5), (6), (7) potranno scriversi rispettivamente così:

$$(8) \quad u_i(x) > u_{i0}(x) - \varepsilon,$$

$$(9) \quad u_i(x) > u_{i0}(a_0) - \varepsilon,$$

$$(10) \quad u_i(x) > u_{i0}(b_0) - \varepsilon,$$

tutte per $i=1, 2, \dots, n$.

Ciò posto ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

I. — *Le funzioni $f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, siano tali da essere verificate le ipotesi a), b), c), d) ed e); sia poi, \mathcal{K} una classe di elementi ordinari $\omega_1 \equiv (\tau, M)$, in cui sono definiti i funzionali $u_i(x; \omega_i)$, $i=1, 2, \dots, n$.*

Allora se i funzionali $v_i(x; \tau)$, $i=1, 2, \dots, p$, sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento τ di \mathcal{C} , i funzionali $u_i(x; \omega_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe \mathcal{K} .

Sia $\omega_{i0} \equiv (\tau_0, M_0)$, con $\tau_0 \equiv (C_0, V_0)$, $V_0 \equiv (v_{10}, \dots, v_{p0}) \in T$, e $M_0 \equiv (\mu_{10}, \dots, \mu_{n0}) \in D$, un qualunque fissato elemento di \mathcal{K} . L'equazione di C_0 sia $y = y_0(x)$, con $y_0(x)$ definita per $x \in (a_0, b_0)$. Faremo vedere che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\varphi > 0$ tale che, per tutti gli elementi $\omega_1 \equiv (\tau, M)$ di \mathcal{K} , con $\tau \equiv (C, V)$, per i quali le curve C appartengono propriamente all'intorno (φ) della C_0 e $V \equiv (v_1, \dots, v_p)$ e $M \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sono tali da essere rispettivamente verificate le (3) e le (4) valgono le (5), (6), (7), cioè usando le notazioni semplificate, le (8), (9), (10).

Indicato con A_1' l'intorno (ρ_1), con $\rho_1 = 1$, della curva C_0 , in base alla ipotesi d) in corrispondenza di esso restano determinati una volta per tutte i numeri positivi μ e Y_1 ivi menzionati.

Supponiamo, poi, che (a_0, b_0) sia tale da essere verificate le (3.11) e (3.12) del lavoro [A], nel caso contrario valendo quanto è stato osservato a proposito della dimostrazione del teorema 3.-I. di [A].

Per ciò che riguarda le (9) e (10) la loro dimostrazione non è diversa da quella svolta in [A] per provare, nel caso del teorema 3.-I, le (3.8) e (3.9).

Facciamo vedere ora che nei punti $x \in J = (a, b) \cap (a_0, b_0)$, per tutti gli elementi ω_1 di \mathcal{K} tali che le relative curve C appartengono propriamente all'intorno (φ) di C_0 e per V e M tali da essere verificate rispettivamente le (3) e le (4), con φ sufficientemente piccolo, si ha la (8).

Come in [A] indicheremo con E_i , $i=1, 2, \dots, n$, l'insieme dei punti di J in cui è

$$u_i(x) < u_{i0}(x),$$

e ad esso associeremo il numero δ_i così definito:

$$\delta_i \left\{ \begin{array}{ll} = \max_{E_i} (u_{i_0}(x) - u_i(x)), & \text{se } E_i \text{ non è vuoto,} \\ = 0, & \text{se } E_i \text{ è vuoto,} \end{array} \right.$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

Indicato con j un valore fra $1, 2, \dots, n$ per il quale si ha:

$$\delta_i \leq \delta_j,$$

per tutti i valori di $i \neq j$, la (8) resterà provata se si fa vedere che è $\delta_j < \varepsilon$.

Come in [A] indichiamo con x' un punto di E_j in cui $u_{j_0}(x) - u_j(x)$ assume il suo valore massimo δ_j , faremo vedere che è:

$$(11) \quad u_i(x') - u_{j_0}(x') > -\varepsilon.$$

Con un ragionamento perfettamente analogo ad uno svolto nel dimostrare il teorema 3.-I. di [A] si prova che è

$$(12) \quad u_i(a') - u_{i_0}(a') > -\frac{\varepsilon}{8}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ora, se $x' = a'$, tenuta presente la (12), resta provata la (11), se invece $x' > a'$, indichiamo con (x'', x') l'intorno sinistro di x' più ampio, contenuto in (a', x') nei punti interni del quale è ancora $u_j(x) < u_{j_0}(x)$. Se è $x'' > a$ è $u_j(x'') = u_{j_0}(x'')$, e se $x'' = a'$ sarà $u_j(a') \leq u_{j_0}(a')$, ma comunque sia, vale la (12), considerata per $i = j$, in ogni caso sarà dunque:

$$(13) \quad u_j(x') - u_{j_0}(x') = u_j(x') - u_j(x'') - u_{j_0}(x') + u_{j_0}(x'') + u_j(x'') - u_{j_0}(x'') \\ > -\frac{\varepsilon}{8} + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0, u_{1_0}, \dots, u_{n_0}) dx.$$

Ora, in virtù del fatto che in base all'ipotesi b) f_j è non decrescente rispetto a v_1, \dots, v_p , tenuto conto dell'ipotesi c), detto κ un opportuno numero positivo tale che per $x \in (x'', x')$ sia $(v_{1_0}(x) - \kappa, \dots, v_{p_0}(x) - \kappa) \in T$, e posto $(v_{1_0}(x) - \kappa, \dots, v_{p_0}(x) - \kappa) \equiv v_0 - \kappa$, si vede subito che esiste finito l'integrale:

$$\int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0 - \kappa, u_{1_0}, \dots, u_{n_0}) dx.$$

D'altra parte, in virtù delle ipotesi a), b), c) e d), tenuto conto del lemma 2. — II stabilito in [A], si vede che esiste l'integrale:

$$(14) \quad \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{1_0}, \dots, u_{n_0}) dx.$$

Ora se ρ è sufficientemente piccolo, per l'ipotesi di uniforme semicon-

tinuità inferiore fatta relativamente a $v_i(x; \tau)$, $i = 1, 2, \dots, p$, ricordato che $\tau_0 \equiv (C_0, V_0)$ e posto $V_0 \equiv (v_{10}, \dots, v_{p0})$ per ogni elemento ω_i di \mathcal{K} , per il quale il relativo elemento $\tau \equiv (C, V)$ ha C appartenente propriamente all'intorno (φ) di C_0 e $V \equiv (v_1, \dots, v_p)$ tale da essere verificate le (3), in tutti i punti $x \in J$ è:

$$v_i(x) > v_{i0}(x) - \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

dove α è un certo prefissato numero positivo. Di qui, tenuto conto della ipotesi b), preso α opportunamente si ricava che è:

$$(15) \quad f_j(x, y, y', v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) < f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}),$$

da cui, tenuta presente anche l'ipotesi c) e ricordato che l'integrale indicato nella (14) esiste finito, segue che l'integrale della funzione a primo membro della (15) esiste finito in (x'', x') ed è:

$$(16) \quad \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx < \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx.$$

Tenuto conto della (16), dalla (13) abbiamo:

$$\begin{aligned} (17) \quad & u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{8} \\ & + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx \\ & + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx \\ & + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx \\ & > -\frac{\varepsilon}{8} + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx \\ & + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx \\ & + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0 - \alpha, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y'_0, v_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx. \end{aligned}$$

Ora svolgiamo le seguenti considerazioni. In tutto (a_0, b_0) , tenuto conto delle ipotesi b) e c), per $x > 0$ è:

$$|f_j(x, y_0, y_0', v_0 - x, u_{10}, \dots, u_{n0})| \leq f_j(x, y_0, y_0', v_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) + 2|N|,$$

laddove $f_j(x, y_0, y_0', v_0, u_{10}, \dots, u_{n0})$ è sommabile in (a_0, b_0) . Tenuto presente ciò e il fatto che f_j è continua, ne viene che certamente esiste un $x > 0$ per cui sia:

$$(18) \quad \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y_0', v_0 - x, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y_0', v_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx > -\frac{\varepsilon}{16}.$$

D'altra parte, determinato che sia un x in modo da valere la (18), con un ragionamento analogo ad uno svolto dal TONELLI ⁷⁾, se ρ è sufficientemente piccolo abbiamo:

$$(19) \quad \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v_0 - x, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y_0', v_0 - x, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx > -\frac{\varepsilon}{16}.$$

Dalla (17), tenute presenti la (18) e la (19), segue:

$$(20) \quad u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{4} + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{n0}) dx.$$

In virtù del lemma 2.—II stabilito in [A] esistono gli integrali:

$$\int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) dx, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

per cui tenuto conto della (20), abbiamo:

$$u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^n \int_{x''}^{x'} \left[f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n) - f_j(x, y, y', v, u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \right] dx,$$

e di qui si prosegue e si conclude, pervenendo alla (11), in maniera perfettamente analoga a quella che è stata svolta in [A] a partire dalla (3.23) per giungere a provare la (3.17).

⁷⁾ Cfr. loc. cit. in ⁶⁾, n. 155, pp 400-406, e osservazione b) del n. 156, pag. 407. Cfr. anche nota ⁽¹⁸⁾ di [A].

2. — Siano $f_i(x, y, y', v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue per ogni (x, y) di un campo A , ogni y' finito, ogni punto (v_1, \dots, v_p) appartenente ad un campo rettangolare T (limitato o non), avente i lati paralleli agli assi coordinati, e per ogni punto (u_1, \dots, u_n) appartenente allo spazio ad n dimensioni, che indicheremo con S_n . Tali funzioni verifichino le ipotesi a), b), c), d), nonché una delle seguenti ipotesi:

f) ad ogni parte limitata A' del campo A , possono sempre farsi corrispondere, per ogni valore di i fra $1, 2, \dots, n$, due funzioni non negative $F_i(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$ e $G_i(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, definite e continue per $v \equiv (v_1, \dots, v_p) \in T$ e (u_1, \dots, u_n) appartenente a S_n , e un numero positivo Y_1 , in modo che, per tutti i punti (x, y) di A' , per tutti gli y' soddisfacenti alla disuguaglianza $|y'| \geq Y_1$ e per tutti i punti $v \equiv (v_1, \dots, v_p) \in T$ e (u_1, \dots, u_n) di S_n , risulti:

$$f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_n) \leq F_i(v, u_1, \dots, u_n) |y'|^{1+\alpha_i} + G_i(v, u_1, \dots, u_n) \quad i=1, 2, \dots, n,$$

dove gli α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono i numeri positivi fissati in a);

g) detta R' una costante non positiva sia:

$$\frac{f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n) - f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(2)}, u_{i+1}, \dots, u_n)}{u_i^{(1)} - u_i^{(2)}} \geq R' [1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |f_i(x, y, y', v, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n)|], \quad i=1, 2, \dots, n,$$

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' , per ogni $v \in T$ e per $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ e $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(2)}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ appartenenti ad S_n , con $u_i^{(1)} > u_i^{(2)}$ e dove le α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono quelle fissate in a).

Supporremo, d'ora innanzi, che ogni elemento τ della classe \mathcal{C} , definita nel n. 1, determina univocamente le p funzioni $v_1(x; \tau), \dots, v_p(x; \tau)$.

Vogliamo far vedere che nelle ipotesi poste sulle f_i , i funzionali $u_i(x; \omega_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono univocamente determinati da $\omega_1 \equiv (\tau, M)$. Precisamente vale il seguente teorema:

II. — Siano $f_i(x, y, y', v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue per ogni punto (x, y) di un campo A , ogni y' finito, ogni punto (v_1, \dots, v_p) di un campo rettangolare T con i lati paralleli agli assi coordinati e per ogni punto (u_1, \dots, u_n) dello spazio ad n dimensioni; inoltre esse verifichino le ipotesi a), b), c), d), nonché l'ipotesi f) o l'ipotesi g).

Allora, se $\omega_1 \equiv (\tau, M)$ è un qualunque elemento ordinario, il sistema differenziale (1), (2) ammette una sola soluzione.

Secondo che vale l'ipotesi f) o g), la dimostrazione è perfettamente analoga a quelle svolte per stabilire rispettivamente i teoremi 5-I. e 6-I. di [A], con l'avvertenza che presentemente, in luogo di definire le fun-

zioni $\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, come nella (5.5) di [A], si porrà:

$$\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n) = f_i[x, y(x), y'(x), v_1(x), \dots, v_p(x), u_1, \dots, u_n], \quad i=1, 2, \dots, n,$$

dove $y = y(x)$ è l'equazione della curva C relativa all'elemento $\tau \equiv (C, V)$ e $v_1(x), \dots, v_p(x)$ sono le p funzioni determinate da τ , e inoltre che, ove occorra, si maggora $v_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, col suo massimo in (a, b) , tenuto conto anche del fatto che le f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono non decrescenti rispetto a v_1, \dots, v_p .

3. — Siano $f_i(x, y, y', v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, le funzioni definite nel n. 1 e verificanti le ipotesi a), b), c), d) ed e), in cui però intendremo che D sia tutto lo spazio S_n ; supporremo inoltre che esse verifichino l'ipotesi f) oppure l'ipotesi g).

Indicheremo con \mathcal{K} la classe di tutti gli elementi ordinari $\omega_1 \equiv (\tau, M)$, con τ appartenente alla classe \mathcal{C} definita nel n. 2 e con M appartenente a S_n . Con \mathcal{K}' indicheremo una sottoclasse di \mathcal{K} per gli elementi della quale è

$$(21) \quad u_i(x; \omega_1) \leq \lambda_i, \quad x \in (a, b), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

dove λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono n fissati numeri reali e (a, b) è l'intervallo in cui è definita la curva C relativa all'elemento $\tau \equiv (C, V)$.

Diremo che l'elemento $\tau_0 \equiv (C_0, V_0)$ di Σ è di accumulazione per gli elementi $\tau(C, V) \equiv (C, V)$ di \mathcal{C} , se la curva C_0 è di accumulazione per le curve C e V_0 è punto di accumulazione dei punti V . Diremo, poi, che l'elemento $\omega_{10} \equiv (\tau_0, M_0)$ di Ω_1 è di accumulazione per gli elementi $\omega_1 \equiv (\tau, M)$ di \mathcal{K}' se l'elemento τ_0 è di accumulazione per gli elementi τ di \mathcal{C} e M_0 è punto di accumulazione dei punti M .

Ci proponiamo, ora, di stabilire il seguente teorema di chiusura:

III. — *Siano $f_i(x, y, y', v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \dots, n$, per ogni punto (x, y) di un campo A , ogni y' finito, per ogni punto (v_1, \dots, v_p) di un campo rettangolare T (limitato o non) con i lati paralleli agli assi coordinati e per ogni punto (u_1, \dots, u_n) dello spazio ad n dimensioni; inoltre esse verifichino le ipotesi a), b), c), d), e), nonchè l'ipotesi f) o l'ipotesi g).*

I funzionali $v_i(x; \tau)$, $i = 1, 2, \dots, p$, siano uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento di \mathcal{C} .

Allora i funzionali $u_i(x; \omega_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definiti dal sistema differenziale (1), (2) sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe \mathcal{K} . Inoltre ogni elemento $\omega_{10} \equiv (\tau_0, M_0)$ dello spazio Ω_1 , con τ_0 appartenente alla classe \mathcal{C} , e che sia di accumulazione per gli elementi di una sottoclasse \mathcal{K}' per gli elementi della quale è valida la (21), appartiene alla classe \mathcal{K} e $u_i(x; \omega_{10})$, $i = 1, 2, \dots, n$, verifica la (21).

Che i funzionali $u_i(x; \omega_1)$, $i = 1, 2, \dots, n$, siano uniformemente semi-continui inferiormente su ogni elemento delle classe \mathcal{K} discende immediatamente dal teorema I, ricordato che sono verificate le ipotesi a), b), c), d) ed e).

Sia $\tau_0 \equiv (C_0, V_0)$ dove C_0 ha equazione $y \equiv y_0(x)$, con $y_0(x)$ definita in (a_0, b_0) e indichiamo con $v_{10}(x), \dots, v_{p0}(x)$ le p funzioni determinate da τ_0 . Per comodità di scrittura porremo $v_0(x) \equiv (v_{10}(x), \dots, v_{p0}(x))$. Onde provare la seconda parte del teorema bisognerà far vedere che il sistema differenziale costituito dalle equazioni:

$$\begin{aligned} u_i'(x) &= f_i[x, y_0(x), y_0'(x), v_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)], \\ u_i(a) &= \mu_{i0}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ammette soluzione (unica).

Indichiamo con $\tau \equiv (C, V)$ un elemento di \mathcal{E} , dove C ha equazione $y = y(x)$, $y(x)$ essendo definita in (a, b) ; siano poi $v_1(x), \dots, v_p(x)$ le p funzioni determinate da τ e porremo $v(x) \equiv (v_1(x), \dots, v_p(x))$.

Tenuto conto che le f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, verificano le condizioni a), b), c), d), con un ragionamento perfettamente anologo ad uno svolto in [A] per stabilirvi la (7.6) nel corso della dimostrazione del teorema 7-I, si prova che per tutti gli elementi $\omega_1 \equiv (\tau, M)$ di una sottoclasse \mathcal{K}_1' , di \mathcal{K} , per M che appartiene ad un opportuno intorno di M_0 e C che appartiene propriamente all'intorno ($\rho = 1$) di C_0 , intorno che indicheremo con A_1 , si ha:

$$(22) \quad \int_a^b f_i(x, y, y', v, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx < L, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

con L fisso e indipendente dalle C di A_1 .

Ricordiamo, ora, che $v_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$ è semicontinuo inferiormente su τ_0 , quindi assegnato un $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un $\rho > 0$ tale che per tutti gli elementi $\tau \equiv (C, V)$ dell'insieme \mathcal{K}_2' di elementi di \mathcal{K}_1' per i quali C appartiene propriamente all'intorno (ρ) della C_0 , intorno che indicheremo con A_2 , e V è tale da verificare le (3), è

$$(23) \quad v_i(x) > v_{i0}(x) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

in tutti i punti $x \in (a, b) \cap (a_0, b_0)$,

$$(24) \quad v_i(x) > v_{i0}(a_0) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x < a_0$,

$$(25) \quad v_i(x) > v_{i0}(b_0) - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x > b_0$.

Definiamo ora in (a, b) p funzioni continue $v_{i0}^{(1)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, al seguente modo:

$$(26) \quad v_{i0}^{(1)}(x) \begin{cases} = v_{i0}(a_0) \text{ negli eventuali punti di } (a, b) \text{ in cui sia } x < a_0, \\ = v_{i0}(x) \text{ in tutti i punti } x \in (a, b) \cap (a_0, b_0), \\ = v_{i0}(b_0) \text{ negli eventuali punti di } (a, b) \text{ in cui sia } x > b_0. \end{cases}$$

Poniamo poi $v_0^{(1)}(x) \equiv (v_{10}^{(1)}(x), \dots, v_{p0}^{(1)}(x))$ e $v_0^{(1)}(x) - \kappa \equiv (v_{10}^{(1)}(x) - \kappa, \dots, v_{p0}^{(1)}(x) - \kappa)$. Ora se κ_1 è un numero positivo per cui $(v_1 - \kappa_1, \dots, v_p - \kappa_1) \in T$, per $\kappa > 0$ e $\kappa < \kappa_1$ e per ρ sufficientemente piccolo, per tutti gli elementi di \mathcal{M}_2' , tenuto conto delle (23), (24) e (25) e del fatto che f_i è non decrescente rispetto a v_1, \dots, v_p , abbiamo:

$$\int_a^b f_i(x, y, y', v_0^{(1)}(x) - \kappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx < \int_a^b f_i(x, y, y', v, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

da cui per la (22) segue:

$$(27) \quad \int_a^b f_i(x, y, y', v_0^{(1)}(x) - \kappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx < L, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

con L fisso indipendente dalle C di A_2 .

Di qui ne viene, come ora proveremo, che esiste finito

$$(28) \quad \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', v_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Cominciamo col rilevare che, tenuto conto delle ipotesi c), d) ed e), possiamo affermare che, qualunque sia $\kappa > 0$ e $\kappa < \kappa_1$ l'integrale:

$$(29) \quad \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y, y', v_0^{(1)}(x) - \kappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

esiste finito; invero se non fosse così, se cioè ci fosse un qualche $\kappa < 0$ e $\kappa < \kappa_1$ per il quale l'integrale indicato in (29) non fosse finito, con un ragionamento non dissimile a quello svolto da TONELLI ⁸⁾ sull'estensione

⁸⁾ Cfr. loc. cit. in ⁶⁾, nn. 170-171, pp. 443-449.

all'infinito della semicontinuità inferiore degli integrali semplici ordinari, sia pure opportunamente variato in qualche punto, si potrebbe determinare un $\rho > 0$, in modo che per ogni curva C appartenente propriamente all'intorno (ρ) in C_0 si avrebbe:

$$(30) \quad \int_a^b f_i(x, y, y', v_0^{(1)}(x) - x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx > L, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e ciò sarebbe in contrasto col fatto che esiste l'intorno A_2 di C_0 per le curve del quale è verificata la (27). Tenuto conto della definizione di $v_m^{(1)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, data nella (26), abbiamo che l'integrale indicato nella (29) ha la seguente espressione:

$$(31) \quad \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y, y', v_0(x) - x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove è stato posto $v_0(x) - x \equiv (v_{10}(x) - x, \dots, v_{p0}(x) - x)$.

In quanto a provare, ora, che l'integrale indicato in (28) esiste finito ragioniamo per assurdo. Supponiamo, invero, che la funzione $f_i[x, y_0(x), y_0'(x), v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n]$, $i = 1, 2, \dots, n$, non sia integrabile in (a_0, b_0) . Allora sia Y_0 un numero positivo e E rappresenti l'insieme dei punti di (a_0, b_0) in cui è $y_0' \leq Y_0$. Evidentemente se $f_i[x, y_0(x), y_0'(x), v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n]$, $i = 1, 2, \dots, n$, non è integrabile in (a_0, b_0) , non lo è neppure $f_i[x, y_0(x), y_0'(x), v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n] + |N|$, $i = 1, 2, \dots, n$, che è sempre non negativa, per ciò per $Y_0 \rightarrow +\infty$ è:

$$\int_E [f_i(x, y_0, y_0', v_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) + |N|] dx \rightarrow +\infty,$$

e quindi anche:

$$\int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx \rightarrow +\infty.$$

Di qui ne viene che per Y_0 sufficientemente grande abbiamo:

$$(32) \quad \int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx > L + 1 + |N| (b_0 - a_0),$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

dove L è la costante che figura nella (27).

Ora, tenuto conto della (32), e se \varkappa è un numero positivo $< \varkappa_1$ abbiamo :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', v_0(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx \\
 & > \int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx - \int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx \\
 & + \int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx - |N| (b_0 - a_0) > L + 1 \\
 & + \left[\int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx - \int_E f_i(x, y_0, y_0', v_0(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx \right], \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Tenuto presente che f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, è continua, non decrescente rispetto a v_1, \dots, v_p e verifica l'ipotesi c), con un ragionamento perfettamente analogo a quello svolto nel n. 1 per provare la (18), si prova che esiste un $\varkappa > 0$ tale che l'espressione in parentesi a secondo membro della (33) risulti $> -\frac{1}{2}$, per cui dalla (33) stessa ricaviamo :

$$(34) \quad \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', v_0(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx > L + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

D'altra parte determinato che si sia un \varkappa in modo che valga la (34), in base alle ipotesi c), d) ed e) con un ragionamento analogo ad uno svolto da TONELLI ⁹⁾ è possibile trovare un $\rho > 0$ tale che per le curve C appartenenti all'intorno (ρ) di C_0 è :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \int_a^b f_i(x, y, y', v_0^{(1)}(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx \\
 & > \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', v_0^{(1)}(x) - \varkappa, \lambda_1, \dots, \lambda_n) dx - \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Ricordato che l'integrale a secondo membro della (35) non è altro che quello indicato in (31), tenute presenti le (34) e (35), ne viene che per

⁹⁾ Cfr. loc. cit. in ⁷⁾.

tutte le curve C per le quali si verifica la (35), si ha che vale la (30) e ciò è in contrasto col fatto che per le curve relative a elementi di \mathcal{H}'_2 , appartenenti all'intorno A_2 di C_0 è verificata la (27). Si deduce, quindi, che l'integrale indicato in (28) non può non esistere finito.

Dopo di che, secondo che vale l'ipotesi f) o l'ipotesi g), la dimostrazione del teorema viene proseguita e condotta a termine in maniera perfettamente analoga a quelle svolte per stabilire rispettivamente i teoremi 7.—I e 8.—I di [A], con l'avvertenza di maggiorare, ove occorra, $v_{i_0}(x)$, $i = 1, 2, \dots, p$, con il suo massimo in (a_0, b_0) , tenuto conto anche del fatto che le f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono non decrescenti rispetto a v_i, \dots, v_p , e tenendo presente, ora, il teorema II in luogo del teorema 5.—I o del teorema 6.—I di [A].

4. Siamo ora in grado di andare a stabilire il richiesto teorema di semicontinuità e di chiusura per i funzionali $u_i(x; \omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definiti da un sistema del tipo (I), nel caso in cui le f_i siano del tipo segnalato nell'introduzione.

Siano $s_0, s_1, \dots, s_h, h + 1$ numeri interi tali da essere:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_h = n.$$

Siano $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue, insieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \dots, n$, per ogni punto (x, y) di un campo A , ogni y' finito e ogni punto (u_1, \dots, u_n) appartenente allo spazio ad n dimensioni. Esse verifichino le seguenti condizioni:

a_1) ogni funzione f_i con $i \leq s_p$, $p = 1, 2, \dots, h - 1$, sia indipendente da tutte le u_i con $i > s_p$;

a_2) per ogni fissato p fra i numeri $0, 1, 2, \dots, h - 1$ si abbia che ogni funzione f_i , per cui è $s_p + 1 \leq i \leq s_{p+1}$, verifichi la condizione a) soltanto per i valori di k che siano tali da aversi $s_p + 1 \leq k \leq s_{p+1}$;

le funzioni f_i verifichino le ipotesi b), c), d), e) e l'ipotesi f) o l'ipotesi g).

Manterremo le notazioni e locuzioni introdotte nel lavoro [A], per cui Ω indicherà lo spazio degli elementi $\omega = (C, M)$, con C curva ammissibile e $M \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n) \in S_n$, \mathfrak{S} indicherà la classe di tutti gli elementi ordinari ω , cioè degli elementi per i quali il sistema differenziale (I) ammette soluzione e \mathfrak{S}' una sottoclasse di \mathfrak{S} per gli elementi della quale è:

$$(36) \quad u_i(x; \omega) \leq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove $\{u_1(x; \omega), \dots, u_n(x; \omega)\}$ indica una soluzione del sistema (I), e λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono n fissati numeri reali; le (36) valendo per tutti x per i quali sono definite le $u_i(x; \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Manterremo, poi, la definizione di elemento di accumulazione di elementi di \mathfrak{S}' , per un elemento $\omega_0 \equiv (C_0, M_0)$ di Ω , data nel n. 7 di [A].

Vale, allora, il seguente teorema di semicontinuità¹⁰⁾ e di chiusura:

VI. — Siano $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \dots, n$, per ogni punto (x, y) di un campo A , ogni y' finito e per ogni punto (u_1, \dots, u_n) appartenente allo spazio ad n dimensioni; inoltre verifichino le ipotesi $a_1)$, $a_2)$, $b)$, $c)$, $d)$, $e)$, nonché l'ipotesi $f)$ o l'ipotesi $g)$.

Allora i funzionali $u_i(x; \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definiti dal sistema differenziale (I), sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe \mathfrak{S} e ogni elemento ω_0 dello spazio Ω che sia di accumulazione per gli elementi di una sottoclasse \mathfrak{S}' , per gli elementi della quale è valida la (36), appartiene a \mathfrak{S} , e $u_i(x; \omega_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, verifica la (36).

Cominciamo con l'osservare che la risoluzione del sistema differenziale (I) nell'ipotesi $a_1)$ fatta sulle f_i è ricondotta alla successiva risoluzione di h problemi ai valori iniziali.

Invero sia $\omega \equiv (C, M)$ un elemento ordinario, allora il sistema (I) ammette soluzione (unica) $\{u_1(x; \omega), \dots, u_n(x; \omega)\}$, orbene non è difficile vedere che qualunque sia p fra i numeri $0, 1, \dots, h-1$ le funzioni $\{u_{s_p+1}(x; \omega), \dots, u_{s_{p+1}}(x; \omega)\}$ costituiscono la soluzione del seguente sistema differenziale:

$$\begin{aligned} u'_i(x) &= f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x; \omega), \dots, u_{s_p}(x; \omega), u_{s_{p+1}}(x), \dots, u_{s_{p+1}}(x)], \\ u_i(x) &= \mu_i, \end{aligned}$$

$$i = s_p + 1, \dots, s_{p+1},$$

un tale sistema lo indicheremo con $S^{(p)}$. Quindi, assegnato che sia un elemento ordinario ω , per risolvere il sistema differenziale (I) si risolve anzitutto il sistema differenziale $S^{(0)}$, una volta ottenuta la soluzione di questo si passa a risolvere il sistema differenziale $S^{(1)}$ e così via fino al sistema $S^{(h-1)}$. Naturalmente dal ragionamento ora fatto segue che se ω è un elemento per il quale il sistema $S^{(0)}$ ammette soluzione (unica) che

¹⁰⁾ Rileviamo che, per ciò che riguarda la semicontinuità, assicurata dalle ipotesi $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ ed $e)$, nel caso in cui è $s_1 = 1$ e $s_2 = n = 2$, col teorema IV si ritrova un risultato già stabilito da TONELLI, sia pure in ipotesi in parte diverse dalle nostre. Cfr. L. TONELLI, *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*, Rend. Acc. Lincei, (6) vol. XXIV. pp. 339-404.

indicheremo con $\{u_1(x; \omega), \dots, u_{s_1}(x; \omega)\}$, e a sua volta il sistema $S^{(1)}$ ammette soluzione (unica) $\{u_{s_1+1}(x; \omega), \dots, u_{s_2}(x; \omega)\}$ e così via tutti i successivi sistemi $S^{(2)}, \dots, S^{(h-1)}$ ammettono soluzione (unica), allora ω è elemento ordinario e il sistema differenziale (I) ammette la soluzione (unica) $\{u_1(x; \omega), \dots, u_n(x; \omega)\}$.

Ciò rilevato è facile vedere che la dimostrazione del teorema si riduce alla successiva applicazione del teorema III ai sistemi $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(h-1)}$.

5. Dopo avere stabilito il teorema IV si è in grado di potere stabilire un teorema di esistenza di minimo per il funzionale $u(b; \omega') = \Phi[u_1(b; \omega'), \dots, u_n(b; \omega')]$, definito nel n. 10 di [A], teorema del tutto analogo a quello 10.—I stabilito in [A].

Naturalmente anche presentemente valgono le considerazioni fatte nel n. 11 di [A] circa una riduzione di ipotesi sulla funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ nel caso in cui le funzioni f_i non sono definite in tutti i punti (u_1, \dots, u_n) di S_n , bensì nei punti di domini di S_n del tipo di quelli indicati proprio nel n. 11 di [A].

UN'OSSERVAZIONE SUL PROBLEMA DI DIRICHLET
PER UN'EQUAZIONE LINEARE ELLITTICA DEL SECONDO ORDINE

Nota del dott. Emilio Gagliardo
presentata dal socio corrispondente G. Stampacchia

(Adunanza del dì 1° marzo 1958)

Sunto. — Si considera il problema di DIRICHLET per un'equazione lineare ellittica del secondo ordine in più variabili indipendenti con condizioni al contorno non omogenee. Supponendo che il termine noto appartenga ad L_p ($p > 1$) e che i dati al contorno abbiano derivate seconde in L_p , si cercano soluzioni che abbiano derivate seconde in L_p .

1. Sia Ω un campo limitato dello spazio E^n ad n dimensioni. Diremo che Ω è di classe $A^{(r)}$, [di classe $A^{(r,\lambda)}$], se la sua frontiera Γ , nell'intorno di ogni suo punto $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, è suscettibile, rispetto ad un opportuno sistema di assi ξ_1, \dots, ξ_n con l'origine in x , di una rappresentazione del tipo:

$$\xi_n = \Xi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

con Ξ funzione definita in un intorno del punto $\xi_1 = 0, \dots, \xi_{n-1} = 0$ ed ivi dotata di derivate r -esime continue, [λ -hölderiane ($0 < \lambda \leq 1$)], (cfr. C. MIRANDA [12] p. 2). In tale ipotesi potremo ricoprire Γ con un numero finito di varietà regolari: Γ_h , ($h = 1, \dots, H$), aperte su Γ e suscettibili di rappresentazioni biunivoche con funzioni a derivate r -esime continue [λ -hölderiane] di $n - 1$ parametri ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , e tali che ogni punto di Γ risulti interno (relativamente a Γ) ad almeno una di esse.

Sia $L_p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni definite in Ω ed ivi di potenza p -esima sommabile ($p > 1$), e $W_p^r(\Omega)$ lo spazio costituito dalle funzioni $u \in L_p(\Omega)$ le cui derivate, nel senso delle distribuzioni, dei primi r ordini appartengono anch'esse a $L_p(\Omega)$, ($r \geq 0$, $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$); la norma in $W_p^r(\Omega)$ essendo definita dalla relazione:

$$\left\| u \right\|_{W_p^r(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(\left| u \right|^p + \sum_{i=1}^{1..r} \sum_{j_1 \dots j_i}^{1..n} \left| \frac{\partial^i u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}} \right|^p \right) d\Omega \right]^{\frac{1}{p}}$$

Indichiamo analogamente con $W_p^r(\Gamma)$ lo spazio costituito dalle fun-

zioni φ definite su Γ e rappresentabili localmente, rispetto ai parametri adottati su Γ_h , mediante funzioni $\varphi_h(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, ($h = 1, \dots, H$), di potenza p -esima sommabile insieme alle derivate, nel senso delle distribuzioni, dei primi r ordini, dove potremo assumere come norma l'espressione:

$$\left\| \varphi \right\|_{W_p^{r-1}(\Gamma)} = \left[\sum_h \int_{\Gamma_h} \left(\left| \varphi_h \right|^p + \sum_i \sum_{j_1, \dots, j_i} \left| \frac{\partial^i \varphi_h}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_i}} \right|^p \right) d\Gamma_h \right]^{\frac{1}{p}}$$

E' noto come per una funzione $u \in W_p^r(\Omega)$, ($\Omega \in A^{(r)}, r \geq 1$), si possa parlare della sua traccia $\gamma(u)$ sulla frontiera Γ , essendo questa una funzione dello spazio $W_p^{r-1}(\Gamma)$ definita o come risultato della trasformazione lineare continua tra $W_p^r(\Omega)$ e $W_p^{r-1}(\Gamma)$ coincidente con l'ordinario significato di valori al contorno se u è continua in $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$, o anche come limite (quasi ovunque) lungo un sistema opportunamente regolare di assi uscenti dai punti di Γ e penetranti nell'interno di Ω .

Consideriamo nel campo Ω , che supporremo di classe $A^{(2,\lambda)}$ l'operatore differenziale ellittico:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(u) = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad , \quad \sum_{ij} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq c_0 \sum_i \lambda_i^2 \quad , \quad c_0 > 0 \end{array} \right.$$

Sussiste il seguente

[1. I] — TEOREMA: *I coefficienti $a_{ij}(x)$ dell'operatore (1.1) siano funzioni dotate in $\bar{\Omega}$ di derivate prime lipschitziane, i coefficienti $b_i(x)$ siano funzioni lipschitziane in $\bar{\Omega}$ e $c(x)$ una funzione misurabile e limitata, con $c(x) \leq 0$.*

In tali ipotesi il problema al contorno

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(u) = f \quad , \quad f \in L_p(\Omega) \\ \gamma(u) = \varphi \quad , \quad \varphi \in W_p^2(\Gamma) \end{array} \right. \quad (p > 1)$$

ammette una e una sola soluzione u nello spazio $W_p^2(\Omega)$.

Questa soluzione soddisfa inoltre ad una disuguaglianza del tipo:

$$(1.3) \quad \left\| u \right\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_1 \left\{ \left\| f \right\|_{L_p(\Omega)} + \left\| \varphi \right\|_{W_p^2(\Gamma)} \right\}$$

dove la costante c_1 dipende da Ω , da p , dalla costante c_0 che compare in

(1.1), dal coefficiente di Lipschitz delle funzioni $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$, $b_i(x)$, e da:
 $\max |a_{ij}(x)|$, $\max |b_i(x)|$, $\sup |c(x)|$.

Nel caso di un'operatore autoaggiunto, e cioè:

$$(1.4) \quad L(u) = \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x) u$$

l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema precedente è assicurata anche se i coefficienti $a_{ij}(x)$ si suppongono soltanto lipschitziani:

[1.II] — TEOREMA: I coefficienti $a_{ij}(x)$ dell'operatore autoaggiunto (1.4) siano funzioni lipschitziane in $\bar{\Omega}$, e $c(x)$ sia una funzione misurabile e limitata con $c(x) \leq 0$.

In tali ipotesi il problema (1.2) per l'operatore (1.4) ammette una e una sola soluzione u nello spazio $W_p^2(\Omega)$.

Questa soluzione soddisfa inoltre ad una disuguaglianza del tipo (1.3) dove nel caso attuale la costante c_1 dipende da Ω , da p , da c_0 , dal coefficiente di Lipschitz delle funzioni $a_{ij}(x)$, e da: $\max |a_{ij}(x)|$, $\sup |c(x)|$.

Come conseguenza di alcuni noti risultati relativi alle proprietà delle funzioni dello spazio $W_{p'}(\Omega)$, (cfr. G. STAMPACCHIA [17], [18], S. L. SOBOLEV [16]) possiamo ancora enunciare:

[1.III] — TEOREMA: Nelle ipotesi dei teoremi precedenti la soluzione del problema (1.2) coincide quasi ovunque con una funzione u che soddisfa alle seguenti condizioni:

u è $\mu_{n-2[p]}$ -quasi continua ¹⁾, e $u \in L_q(\Omega)$ con $q = \frac{np}{n-2p}$, se $p \leq \frac{n}{2}$,

u è continua (hölderiana) se $p > \frac{n}{2}$,

le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), sono $\mu_{n-[p]}$ -quasi continue,

e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{q_1}(\Omega)$ con $q_1 = \frac{np}{n-p}$, se $p \leq n$,

le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sono continue (hölderiane) se $p > n$.

I teoremi precedenti assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet in classi di funzioni dotate di derivate prime e seconde sommabili con un esponente maggiore di 1. Questa impostazione

¹⁾ Dove $[p]$ indica il massimo intero minore di p . Si dice che una funzione u è μ_m -quasi continua in Ω se fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un insieme I le cui proiezioni sugli spazi coordinati ad m dimensioni hanno misura $< \varepsilon$, in modo che la restrizione di u a $\Omega - I$ sia continua. Cfr. G. STAMPACCHIA [17].

differisce pertanto da altre, relative sempre allo stesso problema, che non richiedono per la soluzione condizioni di integrabilità nemmeno per le derivate prime pur considerando soluzioni e dati al contorno in L_p . A questa seconda impostazione appartengono i risultati di G. CIMMINO (cfr. ad es. [2]). Per un'ampia bibliografia cfr. G. MIRANDA [12]; in particolare per l'impostazione del problema qui considerato cfr. [12] n. 38.

Ricordiamo qui che il teorema [1.I] si collega ad un risultato di D. GRECO [6]. Questi, supponendo i coefficienti a_{ij} continui in Ω , i coefficienti b_i , c limitati, con $c \leq 0$, il termine noto f limitato, e i valori al contorno continui con le derivate seconde, dimostra l'esistenza di almeno una soluzione u del problema (1.2) appartenente allo spazio $W_p^2(\Omega)$ per ogni valore finito di p , servendosi della formula di maggiorazione (2.1) riportata nel successivo n. 2.

Il teorema [1.I] è stato dimostrato per $p = 2$ da G. STAMPACCHIA [18], e nel caso di condizioni al contorno omogenee per $p = 2$ da O. A. LADY-ZHENSKAJA [11] e per $p > n$ da A. I. KOSHELEV [8]²⁾.

Il teorema [1.II] estende un teorema di A. I. KOSHELEV [9] relativo al caso di condizioni al contorno omogenee, con coefficienti a_{ij} dotati di derivate prime continue, c continuo ($c \leq 0$), $f \in L_p(\Omega)$, $p > 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

2. Indichiamo con $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, $[C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})]$, la classe delle funzioni continue $[\lambda$ -hölderiane, $0 < \lambda \leq 1]$ in Ω con le derivate prime e seconde.

Per le funzioni $u \in C^{(2,\lambda)}(\Omega)$ D. GRECO [5] [6], utilizzando un noto risultato di A. ZYGMUND e A. P. CALDERON [19], ha dimostrato la seguente limitazione:

$$(2.1) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_2 \left\{ \|L(u)\|_{L_p(\Omega)} + \gamma(u)_{W_p^1(\Gamma)} + \|u\|_{W_p^1(\Omega)} \right\}, \quad (p > 1)$$

dove c_2 dipende da Ω , da p , e dai coefficienti dell'operatore (1.1) unicamente attraverso c_0 , il modulo di continuità delle funzioni a_{ij} , e il massimo valore assoluto di a_{ij} , b_i , c ³⁾.

²⁾ Una recente trattazione del problema per equazioni e sistemi di ordine m , sempre con condizioni al contorno omogenee, si trova in A. I. KOSHELEV [10].

³⁾ La (2.1) è stata dimostrata in [5] in ipotesi di maggiore regolarità per i coefficienti. La sua validità, tenendo presente che c_2 dipende soltanto dagli elementi ora dichiarati, si estende immediatamente al caso di coefficienti a_{ij} continui e di coefficienti b_i , c limitati. Basterà approssimare i coefficienti a_{ij} uniformemente in $\bar{\Omega}$ con funzioni $\{a_{ij}^\nu\}$ più regolari soddisfacenti ad una condizione di ellitticità come quella contenuta in (1.1) con c_0 indipendente da ν , e quasi uniformemente i coefficienti b_i , c con funzioni $\{b_i^\nu\}$, $\{c^\nu\}$ più regolari ed equilimate; indi scrivere per l'operatore così variato la (2.1) e passare al limite.

La (2.1) si estende per continuità allo spazio $Z_p^2(\Omega)$ costituito dalle funzioni $u \in W_p^2(\Omega)$ tali che $\gamma(u) \in W_p^2(\Gamma)$.

Si ha infatti il seguente

[2.I] — LEMMA: *Se Ω è un campo limitato di classe $A^{(2,\lambda)}$, lo spazio $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$ è denso in $Z_p^2(\Omega)$ munito della topologia definita da*

$$(2.2) \quad \|u\|_{Z_p^2(\Omega)} = \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{W_p^2(\Gamma)}.$$

Assegnata una funzione $u \in Z_p^2(\Omega)$ si tratta di approssimarla, nel senso della norma (2.2), con una successione $\{U^v\}$ di funzioni della classe $C^{(2,\lambda)}(\Omega)$. In un precedente lavoro ([4] teorema [1.I]) ho mostrato che se Ω è di classe $A^{(s)}$ le funzioni U^v si possono costruire in modo che risultino continue in $\bar{\Omega}$ con le loro derivate dei primi s ordini. Per dimostrare il teorema [2.1] si può seguire lo stesso procedimento indicato in [4], con $s \geq 3$, osservando però che nel caso attuale le formule di trasformazione di coordinate:

$$x_i = x_i(\xi_1^{(h)}, \dots, \xi_{n-1}^{(h)}) + \zeta_i(\xi_1^{(h)}, \dots, \xi_{n-1}^{(h)})$$

considerate in [4] a pag. 243, si possono supporre al più di classe $C^{(2,\lambda)}$, e di conseguenza tali risultano anche le funzioni U^v .

Sussiste anche il seguente lemma di I. HALPERIN - H. R. PITT - L. NIRENBERG:

[2.II] — LEMMA: *Fissato $\varepsilon > 0$ esiste c_ε tale che:*

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + c_\varepsilon \|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a L. NIRENBERG [14]. (Cfr. anche J. L. LIONS [11].)

Da questo lemma e dalla (2.1) discende il

[2.III] — TEOREMA: *Se nell'operatore (1.1) i coefficienti $a_{ij}(x)$ sono funzioni continue in $\bar{\Omega}$, e i coefficienti $b_i(x)$, $c(x)$ sono funzioni misurabili e limitate, per ogni funzione $u \in Z_p^2(\Omega)$ si ha la limitazione:*

$$(2.3) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_3 \{ \|L(u)\|_{L_p(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{W_p^2(\Gamma)} + \|u\|_{L_p(\Omega)} \}, \quad (p > 1)$$

dove la costante c_3 dipende da Ω , da p , da c_6 , dal modulo di continuità dei coefficienti $a_{ij}(x)$ e da: $\max |a_{ij}(x)|$, $\sup |b_i(x)|$, $\sup |c(x)|$.

3. Consideriamo l'operatore aggiunto $L^*(v)$ di (1.1):

$$L^*(v) = \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} v) - \sum_i^{1..n} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) + cv.$$

I coefficienti dell'operatore $L(u)$ siano di classe $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$. Si può allora scrivere anche:

$$(3.1) \quad L^*(v) = \sum_{ij}^{1..n} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_i^{1..n} \left(-b_i + 2 \sum_j^{1..n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(c - \sum_i^{1..n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial a_{ij}^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) v$$

ed è lecito scrivere, per due funzioni U, V sufficientemente regolari in $\bar{\Omega}$, la formula di Green:

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} [U L^*(V) - V L(U)] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[U \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \frac{\partial U}{\partial \nu} - bUV \right] d\Gamma = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{ij}^{1..n} a_{ij} \cos(x_i, l) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b = \sum_i^{1..n} \left(b_i - \sum_j^{1..n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \cos(x_i, l), \quad l \text{ normale interna} \right)$$

Si dimostra, facendo uso con ragionamento noto della formula di Green (cfr. ad es. G. CIMMINO [2], R. CACCIOPOLI [1], G. FICHERA [3]) il seguente

[3.I] — TEOREMA: *I coefficienti dell'operatore (1.1) siano di classe $C^{(2,\lambda)}(\Omega)$, e sia $c(x) \leq 0$. Per ogni funzione $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ si ha la limitazione*

$$(3.3) \quad \|u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_4 \left\{ \|L(u)\|_{L_p(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{L_p(\Gamma)} \right\}, \quad (p > 1),$$

dove la costante c_4 dipende da p e dai coefficienti dell'operatore $L(u)$.

La (3.3) sussiste uniformemente al variare di $L(u)$ in una famiglia di operatori ellittici tale che valgano uniformemente le limitazioni:

$$(3.4) \quad \max |a_{ij}(x)| \leq c_5$$

$$(3.5) \quad \max |v_0| + \sum_i^{1..n} \max \left| \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right| \leq c_6$$

⁴⁾ Per precisare gli elementi dai quali dipende la costante c_6 cfr. [12] cap. V. Nel numero successivo dimostreremo che la costante c_6 dipende soltanto dagli elementi dichiarati nell'enunciato del teorema [1.I] (o del teorema [1.II] se ci si riferisce all'operatore autoaggiunto (1.4)).

dove v_0 è la soluzione del problema aggiunto :

$$(3.6) \quad \begin{cases} L^*(v_0) = 1 \\ \gamma(v_0) = 0. \end{cases}$$

Esponiamo la dimostrazione per comodità del lettore. Si osserva anzitutto che si ha in Ω :

$$(3.7) \quad v_0 \leq 0.$$

Detta infatti g un'arbitraria funzione ≥ 0 in Ω e sufficientemente regolare, e detta z la soluzione del problema

$$\begin{cases} L(z) = g \\ \gamma(z) = 0 \end{cases}$$

si ha (per note proprietà di massimo delle soluzioni delle equazioni ellittiche ([12] n. 3)) $z \leq 0$, e quindi per la formula di Green (3.2) con $U = z$, $V = v_0$:

$$\int_{\Omega} v_0 g \, d\Omega = \int_{\Omega} z L^*(v_0) \, d\Omega = \int_{\Omega} z \, d\Omega \leq 0 ,$$

dove la (3.7).

Premesso ciò, ponendo nella formula di Green (3.2) $V = v_0$, $U = |\pi|^p$ dove π è un generico polinomio in π variabili, si ottiene

$$(3.8) \quad \int_{\Omega} |\pi|^p \, d\Omega = \int_{\Omega} v_0 L(|\pi|^p) \, d\Omega - \int_{\Gamma} |\pi|^p \frac{\partial v_0}{\partial \nu} \, d\Gamma, \quad ^5),$$

⁵⁾ Per assicurare la validità di questa formula (per $p > 1$) basta accertare che la funzione $|\pi|^p$, continua con le derivate prime, possiede derivate seconde sommabili in Ω . Provato ciò la (3.8) si ottiene con un passaggio al limite approssimando $|\pi|^p$ con funzioni più regolari, la convergenza essendo uniforme per le funzioni e per le derivate prime, e in media per le derivate seconde.

Per dimostrare la sommabilità delle derivate seconde di $|\pi|^p$ in Ω basta provare la sommabilità, in un cubo Q a spigoli paralleli agli assi e contenente Ω , delle funzioni :

$$|\pi|^{p-2} \left| \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right|.$$

A tale scopo osserviamo che detto N il grado del polinomio π , e detta I una qualunque intersezione di Q con una retta parallela all'asse x_i , decompo-

ossia

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\pi|^p d\Omega &= \int_{\Omega} v_0 p |\pi|^{p-1} \operatorname{sign} \pi L(\pi) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} v_0 p(p-1) |\pi|^{p-2} \sum_{ij}^{1..n} a_{ij} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \frac{\partial \pi}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} v_0(1-p) c |\pi|^p d\Omega - \int_{\Gamma} |\pi|^p \frac{\partial v_0}{\partial \nu} d\Gamma. \end{aligned}$$

Di qui osservando che per la (3.7) e per l'ipotesi $c \leq 0$ il secondo e il terzo integrale a secondo membro risultano negativi, si ottiene, tenendo conto delle (3.4), (3.5):

$$\int_{\Omega} |\pi|^p d\Omega \leq c_5 c_6 p \left\{ \int_{\Omega} |\pi|^{p-1} L(\pi) d\Omega + \int_{\Gamma} |\pi|^p d\Gamma \right\}.$$

Scrivendo questa relazione per una successione $\{\pi^v\}$ di polinomi convergente uniformemente in Ω con le derivate seconde verso una funzione $u \in C^{(2)}(\Omega)$, si ottiene:

$$\int_{\Omega} |u|^p d\Omega \leq c_5 c_6 p \left\{ \int_{\Omega} |u|^{p-1} L(u) d\Omega + \int_{\Gamma} |u|^p d\Gamma \right\}$$

donde per la disuguaglianza di Schwarz-Hölder e per note disuguaglianze ⁶⁾ segue la (3.3).

nendo I negli intervalli I_k , ($k = 1, \dots, K \leq N$), su ciascuno dei quali π è monotono, si ha:

$$\begin{aligned} \int_I |\pi|^{p-2} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} dx &\leq \max_q \left| \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right| \sum_h^{1..K} \int_I |\pi|^{p-2} \left| \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \right| dx \leq \\ &\leq \max_q \left| \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right| \cdot N \cdot \frac{2 \max_q |\pi|^{p-1}}{p-1} \end{aligned}$$

⁶⁾ Dalla disuguaglianza $A^p \leq A^{p-1} B + C^p$, ($A, B, C > 0$), distinguendo i due casi: $C^p \leq A^{p-1} B$, $A^{p-1} B < C^p$, segue in ogni caso $A \leq 2B + 2^{\frac{1}{p}} C$.

4. Dimostriamo in questo numero i due seguenti teoremi:

[4.I] — TEOREMA: Se nell'operatore (1.1) i coefficienti $a_{ij}(x)$ sono dotati in Ω di derivate prime lipschitziane, i coefficienti $b_i(x)$ sono lipschitziani in $\bar{\Omega}$, e $c(x)$ è misurabile e limitato, con $c(x) \leq 0$, per ogni funzione $u \in Z_p^2(\Omega)$ si ha la limitazione:

$$(4.1) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_7 \left\{ \|L(u)\|_{L_p(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{W_p^2(\Gamma)} \right\}$$

dove la costante c_7 dipende da Ω , p , c_0 , dal coefficiente di Lipschitz delle funzioni $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$, $b_i(x)$, e da: $\max |a_{ij}(x)|$, $\max |b_i(x)|$, $\sup |c(x)|$.

[4.II] — TEOREMA: Se nell'operatore autoaggiunto (1.4) i coefficienti $a_{ij}(x)$ sono lipschitziani in Ω , e $c(x)$ è misurabile e limitato, con $c(x) \leq 0$, per ogni funzione $u \in Z_p^2(\Omega)$ si ha la limitazione (4.1), dove nel caso attuale la costante c_7 dipende da Ω , p , c_0 , dal coefficiente di Lipschitz delle funzioni $a_{ij}(x)$, e da: $\max |a_{ij}(x)|$, $\sup |c(x)|$.

Riferiamoci anzitutto al teorema [4.I].

In base al teorema [2.I] è sufficiente dimostrare la (4.1) per $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Potremo anche supporre che i coefficienti dell'operatore $L(u)$ siano di classe $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$, precisando però che la costante c_7 dipende esclusivamente dagli elementi dichiarati γ .

Per stabilire la (4.1) possiamo ricorrere ai teoremi [2.III], [3.I]; occorre a tale scopo dimostrare che per la funzione v_0 introdotta nell'enunciato del teorema [3.I] sussiste la limitazione (3.5) con una costante c_6 dipendente soltanto dagli elementi dichiarati nell'enunciato del teorema [4.I].

Fissiamo un numero $q > n$; applicando all'operatore aggiunto (3.1) il teorema [2.III], con $u = v_0$, $p = q$, si ottiene una limitazione del tipo:

$$(4.2) \quad \|v_0\|_{W_{q^2}^2(\Omega)} \leq c_8 \left\{ 1 + \|v_0\|_{L_q(\Omega)} \right\}$$

dove la costante c_8 dipende da Ω , q , c_0 , dal modulo di continuità

⁷⁾ Cfr. ³⁾. Nel caso attuale basterà approssimare i coefficienti a_{ij} uniformemente in Ω con funzioni $\{a_{ij}^v\}$ di classe $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$ soddisfacenti ad una condizione di ellitticità come quella contenuta in (1.1) con c_0 indipendente da v ed aventi derivate seconde equilimitate, i coefficienti b_i uniformemente con funzioni $\{b_i^v\}$ di classe $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$ dotate di derivate prime equilimitate, e c quasi uniformemente con funzioni $\{c^v\}$ di classe $C^{(2,\lambda)}(\bar{\Omega})$, equilimitate e tali che $c^v \leq 0$, indi scrivere per l'operatore così variato la (5.1) e passare al limite.

dei coefficienti a_{ij} e da: $\max |a_{ij}|$, $\max \left| -b_i + 2 \sum_j^{1..n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right|$,
 $\max \left| c - \sum_i^{1..n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right|$, ossia in ultima analisi, fissato ad es.
 $q = n + 1$, dagli elementi elencati in [4.I].

Si ha d'altra parte, per note maggiorazioni di S. L. SOBOLEV [16], avendo scelto $q > n$:

$$(4.3) \quad \max |v_0| + \sum_i^{1..n} \max \left| \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right| \leq c_9 \|v_0\|_{W_q^2(\Omega)}$$

dove c_9 dipende da Ω .

Dalle (4.3), (4.2), tenendo inoltre conto della disuguaglianza:

$$(4.4) \quad \|v_0\|_{L_q(\Omega)} \leq \varepsilon \max |v_0| + \varepsilon^{-q+1} \int_{\Omega} |v_0| d\Omega. \quad (\varepsilon > 0) \quad ^8)$$

segue, per l'arbitrarietà di ε , ⁹⁾:

$$(4.5) \quad \max |v_0| + \sum_i^{1..n} \max \left| \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right| \leq c_{10} \left\{ 1 + \int_{\Omega} |v_0| d\Omega \right\}$$

dove c_{10} dipende da Ω e dalla costante c_9 .

Resta da maggiorare l'integrale a secondo membro della (4.5).

Sia u_0 la soluzione del problema

$$(4.6) \quad \begin{cases} L(u_0) = 1 \\ \gamma(u) = 0. \end{cases}$$

Si ha allora in Ω , per note proprietà delle soluzioni delle equazioni ellittiche ([12], teorema 3.I, teorema 35.VI):

$$(4.7) \quad u_0 \leq 0$$

$$(4.8) \quad |u_0| \leq c_{11}$$

dove la costante c_{11} dipende da Ω , c_0 , $\max |a_{ij}|$, $\max |b_i|$, $\max |c|$.

⁸⁾ Si ha infatti:

$$\left(\int_{\Omega} |v_0|^q d\Omega \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\max |v_0|^{q-1} \int_{\Omega} |v_0| d\Omega \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left[\varepsilon \max |v_0| \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\varepsilon^{-q+1} \int_{\Omega} |v_0| d\Omega \right]^{\frac{1}{q}}$$

donde, indicando con A, B le quantità contenute entro parentesi [], [], distinguendo i casi: $B \leq A$, $A < B$, segue in entrambi i casi la (4.4).

⁹⁾ Basterà ad es. assumere $\varepsilon = \frac{1}{2c_9 c_9}$.

Scriviamo la formula di Green (3.2) con $U = u_0$, $V = |\pi|^\rho$, dove π è un generico polinomio in n variabili e ρ è un numero > 1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\pi|^\rho d\Omega &= \int_{\Omega} u_0 \rho |\pi|^{\rho-1} \operatorname{sign} \pi L^*(\pi) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} u_0 \rho (\rho - 1) |\pi|^{\rho-2} \sum_{ij}^{1..n} a_{ij} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \frac{\partial \pi}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} u_0 (1 - \rho) \left(c - \sum_i^{1..n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right) |\pi|^\rho d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma} |\pi|^\rho \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\Gamma, \end{aligned} \quad (10).$$

Di qui osservando che per la (4.7) il secondo integrale a secondo membro è negativo, e tenendo conto della (4.8), si ricava:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\pi|^\rho d\Omega &\leq c_{11} \left\{ \rho \int_{\Omega} |\pi|^{\rho-1} |L^*(\pi)| d\Omega + \right. \\ &+ (\rho - 1) \max \left(c - \sum_i^{1..n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{ij}^{1..n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \int_{\Omega} |\pi|^\rho d\Omega \left. \right\} + \\ &+ \int_{\Gamma} |\pi|^\rho \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right| d\Gamma \end{aligned}$$

e quindi per $\rho \rightarrow 1$:

$$\int_{\Omega} |\pi| d\Omega \leq c_{11} \int_{\Omega} |L^*(\pi)| d\Omega + \int_{\Gamma} |\pi| \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right| d\Gamma.$$

Scrivendo questa relazione per una successione $\{\pi^\nu\}$ di polinomi convergente uniformemente in Ω con le derivate seconde verso la funzione v_0 introdotta precedentemente, si ottiene con un passaggio al limite:

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} |v_0| d\Omega \leq c_{11} \operatorname{mis} \Omega = c_{12}.$$

¹⁰⁾ Cfr. 5).

Dalle (4.5), (4.9) segue la (3.5) e quindi la tesi.

Se poi $L(u)$ è l'operatore autoaggiunto (1.4), che potremo scrivere anche nella forma:

$$L(u) = L^*(u) = \sum_{ij}^{1..n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^{1..n} \left(\sum_j^{1..n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u$$

si dimostra in modo analogo il teorema [4.II].

5. Nel numero precedente è contenuta la dimostrazione di un teorema che enunciano ora esplicitamente.

E' noto che per ottenere una limitazione del tipo (4.1) si richiedono di solito ipotesi assai più restrittive per i coefficienti dell'operatore $L(u)$ di quelle che sono invece sufficienti per stabilire una limitazione del tipo (2.3).

Nelle applicazioni importa invece stabilire la (4.1) in ipotesi il più possibile generali per i coefficienti, o anche, ciò che è equivalente (cfr. ad es. ^{3) 7)}), supponendo i coefficienti regolari a piacere ma facendo dipendere da questi la costante c_7 attraverso il minor numero possibile di elementi. Sussiste a tale proposito la seguente

[5.I] — OSSERVAZIONE: *I coefficienti dell'operatore (1.1) siano di classe $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, e sia $c(x) \leq 0$.*

Supponiamo acquisita la formula (2.3) anche per la soluzione v_0 del problema aggiunto (3.6), e cioè:

$$\|v_0\|_{W_q^2(\Omega)} \leq c_{13} \left\{ 1 + \|v_0\|_{L_q(\Omega)} \right\},$$

per un fissato $q > n$.

Supponiamo inoltre dimostrata per la soluzione u_0 del problema (4.6) la limitazione (4.8).

Per ogni funzione $u \in Z_p^2(\Omega)$ si ha allora la limitazione (4.1) dove la costante c_7 dipende unicamente da Ω, p, q , dal massimo valore assoluto dei coefficienti $a_{ij}(x)$, e dagli stessi elementi da cui dipendono le costanti c_3, c_{13}, c_{11} .

Se in particolare l'operatore è autoaggiunto si può dunque affermare che una volta stabilita per ogni $p > 1$ la (2.3), e la (4.8), sussiste anche la (4.1) dove la costante c_7 dipende da Ω, p , dal massimo valore assoluto dei coefficienti a_{ij} , e dagli stessi elementi da cui dipendono le costanti c_3, c_{11} .

6. Dimostriamo ora i teoremi [1.I] [1.II].

La formula (4.1), scritta per la differenza di due soluzioni del problema (1.2), ci permette subito di affermare che nello spazio $W_p^2(\Omega)$ il problema (1.2) ammette al più una soluzione.

Per dimostrare l'esistenza di tale soluzione approssimiamo il termine noto f e i dati al contorno φ con successioni di funzioni più regolari: $\{f^\nu\}$, $\{\varphi^\nu\}$ tali che si abbia:

$$(6.1) \quad \|f^\nu - f\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|\varphi^\nu - \varphi\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\text{per } \nu \rightarrow \infty);$$

fissate due costanti c_{14} , c_{15} maggiori di 1 valgono allora (per ν sufficientemente grande) le limitazioni:

$$(6.2) \quad \|f^\nu\|_{L_p(\Omega)} \leq c_{14} \|f\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi^\nu\|_{W_p^2(\Gamma)} \leq c_{15} \|\varphi\|_{W_p^2(\Gamma)}.$$

Approssimiamo inoltre uniformemente i coefficienti a_{ij} e quasi uniformemente i coefficienti b_i , c mediante successioni di funzioni più regolari $\{a_{ij}^\nu\}$, $\{b_i^\nu\}$, $\{c^\nu\}$, con $c^\nu \leq 0$, in modo che le funzioni $\frac{\partial a_{ij}^\nu}{\partial x_i}$, b_i^ν abbiano coefficienti di Lipschitz equilimitati, e le funzioni a_{ij}^ν , b_i^ν , c^ν siano equilimitate. La convergenza uniforme delle successioni $\{a_{ij}^\nu\}$ implica che (per ν sufficientemente grande) anche le funzioni a_{ij}^ν soddisfano a una condizione di ellitticità come quella contenuta in (1.1), con c_0 indipendente da ν .

Detto $L^\nu(u)$ l'operatore ellittico costruito con i coefficienti a_{ij}^ν , b_i^ν , c^ν , sussiste allora per il teorema [4.I] la limitazione:

$$(6.3) \quad \|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_{16} \{ \|L^\nu(u)\|_{L_p(\Omega)} + \|\gamma(u)\|_{W_p^2(\Gamma)} \}$$

con c_{16} indipendente da ν .

In ipotesi di sufficiente regolarità per a_{ij}^ν , b_i^ν , c^ν (≤ 0), f^ν , φ^ν , esiste ed è unica nella classe $C^{(2)}(\Omega)$, per ogni ν , la soluzione del problema:

$$(6.4) \quad \begin{cases} L^\nu(u^\nu) = f^\nu \\ \gamma(u^\nu) = \varphi^\nu. \end{cases} \quad 11)$$

¹¹⁾ Ricorrendo ad es. a noti risultati di J. SCHAUDER e di R. CACCIOPOLI (cfr. [12] teorema 36.I) si può assumere nel caso attuale: $a_{ij}^\nu = a_{ij}$, $b_i^\nu = b_i$, in quanto le ipotesi di regolarità per i coefficienti a_{ij} , b_i formulate nel teorema [1.I] sono già sufficienti per poter applicare questi risultati; non altrettanto si potrà dire nel caso del teorema [1.II].

Dalla (6.3), scritta per $u = u^v$, e dalla (6.2) segue:

$$(6.5) \quad \|u^v\|_{W_p^2(\Omega)} \leq c_{17}$$

con c_{17} indipendente da v .

Per un teorema di compattezza di C. B. MORREY [13] (cfr. anche un teorema di V. I. KONDRASHOV [7], [16] pp. 83-94 sulla completa continuità dell'immersione dello spazio $W_p^2(\Omega)$ in $W_p^1(\Omega)$) dalla (6.5) segue che gli integrali

$$(6.6) \quad \int_I \sum_i^{1..n} \left| \frac{\partial u^v}{\partial x_i} \right|^p d\Omega, \quad \int_I |u^v|^p d\Omega$$

estesi a sottoinsiemi I di Ω risultano, come funzioni di I , equiassolutamente continui.

Scrivendo le equazioni soddisfatte da due funzioni della successione $\{u^v\}$, e sottraendo si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} L^v(u^v - u^\mu) &= (f^v - f^\mu) - \sum_{ij}^{1..n} (a_{ij}^v - a_{ij}^\mu) \frac{\partial^2 u^\mu}{\partial x_i \partial x_j} - \\ &- \sum_i^{1..n} (b_i^v - b_i^\mu) \frac{\partial u^\mu}{\partial x_i} - (c^v - c^\mu) u^\mu \\ \gamma(u^v - u^\mu) &= (\varphi^v - \varphi^\mu). \end{aligned} \right.$$

Di qui, scrivendo per la differenza $(u^v - u^\mu)$ la (6.3), tenendo presenti le (6.1), la convergenza uniforme delle successioni $\{a_{ij}^v\}$, la (6.5), la convergenza quasi uniforme delle successioni $\{b_i^v\}$, $\{c^v\}$, e l'equiassoluta continuità degli integrali (6.6), segue:

$$\|u^v - u^\mu\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (\text{per } v, \mu \rightarrow +\infty).$$

Per la completezza e per altre note proprietà dello spazio $W_p^2(\Omega)$, (cfr. [16]), esiste allora una funzione $u^0 \in W_p^2(\Omega)$ tale che

$$\|u^v - u^0\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|\gamma(u^v) - \gamma(u^0)\|_{W_p^1(\Gamma)} \rightarrow 0 \quad (\text{per } v \rightarrow +\infty).$$

Passando al limite in (6.4) risulta allora che la funzione u^0 risolve il problema (1.2) e soddisfa, per la (6.3), alla disuguaglianza (1.3).

Il teorema [1.II] si dimostra analogamente in base al teorema [4.II].

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. CACCIOPOLI. *Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali*. Giornale di Matematiche di Battaglini, 80, 186-212 (1950-51).
- [2] G. CIMMINO. *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. Rend. Circolo Mat. di Palermo, 61, 177-220 (1937).
- [3] G. FICHERA. *Methods of functional linear analysis in mathematical physics*. Proceedings of International Congress of Mathematicians, vol. 3°, pp. 216-228 (Amsterdam, 1954).
- [4] E. GAGLIARDO. *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili*. Ricerche di Matematica, 5, 239-257 (1956).
- [5] D. GRECO. *Nuove formule integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale*. Ricerche di Matematica, 5, 126-149 (1956).
- [6] D. GRECO. *Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica in n variabili*. Ricerche di Matematica, 5, 150-158 (1956).
- [7] V. I. KONDRASHOV. *Alcune proprietà delle funzioni in più variabili* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 48, 563-566 (1945).
- [8] A. I. KOSHELEV. *Relazioni tra spazi differenziali, e teoremi di esistenza* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 105, 22-25 (1955).
- [9] A. I. KOSHELEV. *Sulla limitatezza in L_p delle derivate delle soluzioni di equazioni differenziali ellittiche* (in russo). Matematicheskij Sbornik, 38 (80), 359-372 (1956).
- [10] A. I. KOSHELEV. *Sulla limitatezza in L_p delle derivate delle soluzioni di equazioni e sistemi ellittici* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 116, 542-544 (1957).
- [11] O. A. LADYZHENSKAJA. *Sulla chiusura di un operatore ellittico* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 79, 723-725 (1951).
- [11'] J. L. LIONS. *Ouverts m - réguliers*. Rivista de la Union Mat. Argentina. Homenaje a Beppo Levi, 103-116, (Buenos Aires, 1955).
- [12] C. MIRANDA. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* (Springer, Berlin, 1955).
- [13] C. B. MORREY. *Functions of several variables and absolute continuity*. Duke Math. J., 6, 187-215 (1940).
- [14] L. NIRENBERG. *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*. Communications on pure and applied Mathematics, 8, 648-674 (1955).
- [15] S. L. SOBOLEV. *Su un teorema di analisi funzionale* (in russo). Matematicheskij Sbornik, 4 (46), 471-497 (1938).
- [16] S. L. SOBOLEV. *Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica* (in russo). (Lenigrad, 1950).
- [17] G. STAMPACCHIA. *Sopra una classe di funzioni in n variabili*. Ricerche di Matematica, 1, 27-54 (1952).
- [18] G. STAMPACCHIA. *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse*. Annali di Matematica, (4), 33, 211-238 (1952).
- [19] A. ZYGMUND - A. P. CALDERON. *On the existence of certain singular integrals*. Acta Mathematica, 88, 85-139 (1952).

GLI ESTERI ALIFATICI DELL' ACIDO 5-IODOSALICILICO
IN RELAZIONE ALLA LORO ATTIVITÀ ANTIMICROBICA E BATTERIOSTATICA

Nota del socio corr. Mario Covello e del dott. Gaetano Pepe

[Adunanza del dì 5 aprile 1958]

Sunto. — Sono stati preparati ventuno esteri dell'acido 5-iodosalicilico, dei quali solo due erano noti. Per la preparazione dei nuovi composti sono stati revisionati procedimenti già seguiti da altri AA. e messe a punto tecniche più adeguate alle nuove finalità preparative. Tutti i composti, preparati e purificati, dopo essere stati sottoposti ad analisi quantitativa ed averne accertata la composizione, sono stati sperimentati in riferimento alla loro attività antimicrobica, fine precipuo questo, del presente lavoro. Infatti, in continuazione di ricerche, già intraprese da tempo da uno degli AA., si è avuto di mira di potere stabilire quanto influisca sull'attività antimicrobica dei derivati salicilici l'introduzione dell'iodio nella molecola.

Vengono ricavate utili conclusioni dai risultati sperimentali ottenuti nella valutazione dell'attività antimicrobica, le quali costituiscono una premessa per ulteriori ricerche nella medesima direzione.

Tenuto conto dell'esaltazione del potere criptotossico nei derivati degli acidi iodosalicilici, messa in evidenza da uno di noi, ¹⁾ rispetto a quello riscontrato da VINCENT e VELLUZ per i salicilici semplici e per gli alogenoderivati di questi, ²⁾ abbiamo creduto interessante di saggiare anche l'attività antimicrobica e batteriostatica degli esteri alifatici dell'acido 5-iodosalicilico.

Dalla letteratura risultano noti solamente il metilico e l'etilico. Pertanto è stato necessario mettere a punto adatti metodi di preparazione per l'ottenimento degli altri termini della serie.

Praticamente si è fatto ricorso a due diversi procedimenti:

a) esterificazione dell'acido con l'alcool sotto l'azione di acido cloridrico gassoso e secco;

b) azione del cloruro dell'acido 5-iodosalicilico direttamente sull'alcool.

Mentre alla preparazione dei termini più semplici è stato possibile applicare entrambi i suddetti metodi, i termini più complessi sono stati

¹⁾ M. COVELLO. — *Ann. Chim. Appl.*, 31, 235, (1940).

²⁾ VINCENT-VELLUZ *Compt. Rend.* 192, 648, (1931).

ottenuti solamente adoperando il secondo procedimento e questo per la insolubilità dell'acido cloridrico negli alcoolli ad elevato peso molecolare.

Tutti gli esteri preparati, danno, in soluzione alcoolica, la reazione col cloruro ferrico. Saponificati, in ambiente alcalino, forniscono l'acido di partenza e si decompongono solo a temperatura elevata mettendo in libertà lo iodo. Per la preparazione dei sali sodici (salificando il gruppo -OH) con idrossido alcalino si sono incontrate notevoli difficoltà. Abbiamo avuto risultati quasi del tutto negativi usando sia soluzioni acquose di NaOH sia soda alcoolica. In qualche caso abbiamo avuto soluzioni che, per acidificazione con acido minerale, fornivano solo leggero intorbidamento, in altri casi, le prove erano del tutto negative. Alcuni degli esteri (allilico, propilico, butilico, butilico sec., isobutilico primario, amilico norm., amilico sec., amilico attivo, isoamilico sec., esilico norm., esilico sec., iso-esilico, ottilico sec., iso-ottilico) dibattuti lungamente con acqua in agitatore, liberati accuratamente dalla parte oleosa, forniscono delle soluzioni acquose che danno positiva la reazione col cloruro ferrico.

Per quanto riguarda lo stato fisico si deve notare che oltre i due primi termini (metilico ed etilico), sono solidi quelli che hanno ramificazioni nella catena laterale (isopropilico ed iso-butilico terz.) e quelli ad alto peso molecolare (ottilico norm., decilico norm., dodecilico norm.). I punti di fusione di questi ultimi risultano più bassi dei precedenti.

Le determinazioni di iodo sono state eseguite con il metodo descritto da BENNIE TAK e ALBERT J. BOYLE ³⁾.

PARTE SPERIMENTALE

Preparazione del cloruro dell'acido 5-iodosalicilico

20 g. di acido 5-iodosalicilico vengono posti a reagire, in un palloncino a smeriglio fornito di refrigerante a ricadere e tubo a CaCl_2 , con 30 cc di cloruro di tionile distillato di recente. La reazione, in un primo momento vivace (raffreddare), prosegue con minore attività. Si riscalda allora con bagno esterno (tenuto sui 60° - 70° C) fino a quando dal tubo a cloruro di calcio non si svolgono fumi di HCl (circa un paio di ore).

Si svapora, quindi, accuratamente il contenuto del palloncino sotto vuoto (pompa a caduta d'acqua) fino a che non si sente più odore di SO_2 . Il residuo, che si presenta leggermente colorato in giallo, viene sciolto a caldo in toluolo, filtrato, leggermente svaporato sotto vuoto e fatto cristallizzare. Il prodotto fonde intorno a 57° C, decomponendosi. Si presenta come una massa cristallina leggermente colorata in giallo. La resa della preparazione è quasi teorica.

³⁾ BRENANS, PROST., C. R., 176, 1628, (1923).

SCHMITT. - J. 385, (1864).

Il prodotto che si decompone all'aria emettendo fumi di HCl , deve essere conservato in fiale di vetro; meglio se preparato poco prima dell'uso.

Saponificato in soluzione alcalina fornisce l'acido di partenza a p. f. 198°C .

Preparazione estere metilico

I^o metodo. — 10 g. di acido 5-iodosalicilico vengono sciolti in 50 cc. di alcool metilico assoluto in un palloncino collegato con l'apparecchio di produzione dell' HCl gassoso e secco. Attraverso la soluzione viene fatta passare una corrente di HCl per circa 60' fino a saturazione, curando di raffreddare il palloncino con acqua e ghiaccio. Si fa riposare la soluzione per 27 ore, si svapora l'alcool sotto vuoto e si tratta il residuo con soluzione satura di bicarbonato per sciogliere l'eventuale acido che non ha reagito. Si cristallizza da alcool metilico: prismi rettangolari a p. f. $76,5^{\circ}$ - $77,5^{\circ}$; resa 70 % circa.

II^o metodo. — 10 g. di cloruro acido sono posti a reagire con 15 cc. di alcool metilico assoluto in un palloncino fornito di allunga di vetro e tubo a CaCl_2 raffreddato esternamente con acqua e ghiaccio. La reazione, inizialmente vivace, prosegue fino a completa dissoluzione del cloruro acido. Si fa riposare la soluzione per circa 24 ore, si svapora l'alcool sotto vuoto, fino a che non si sente più odore di HCl . Si riprende il residuo con soluzione satura di bicarbonato per solubilizzare l'eventuale acido iodosalicilico, si lava il residuo con acqua, si secca accuratamente e si cristallizza da alcool metilico. Si ottiene un prodotto del tutto simile a quello ottenuto precedentemente. La resa è del 95 % circa.

Analisi :

trov. % : J 45,43

per $\text{C}_6\text{H}_3\text{J}(\text{OH})(\text{COOCH}_3)$ calc. % : J 45,82

Preparazione estere etilico

I^o metodo. — 5 g. di acido 5-iodosalicilico sono stati sciolti in 80 cc. di alcool etilico assoluto in un palloncino con l'apparecchio di produzione dell' HCl gassoso e secco.

Il palloncino, dopo che la reazione è avviata, viene riscaldato con bagno esterno a 85° e si mantiene a questa temperatura per 90' circa. Si allontana il bagno, si fa scendere lentamente la temperatura ed infine si raffredda con bagno ad acqua a temp. ambiente. La durata complessiva del gorgogliamento non deve essere inferiore a tre h. Si fa riposare la soluzione per circa 30 ore, si svapora accuratamente sotto vuoto ed il residuo viene lavato con soluzione satura di bicarbonato (per allontanare

l'eventuale acido che non ha reagito) e con acqua. Messo il residuo su piatto poroso lo si è cristallizzato due volte da alcool etilico. L'estere cristallizza in piccoli aghi setacei a p. f. $72^{\circ},5 - 72^{\circ}$ C. Resa 68% circa.

II° metodo. — 10 g. di cloruro acido sono stati posti a reagire con 15 cc. di alcool etilico assoluto in un palloncino fornito di allunga di vetro e tubo a CaCl_2 , raffreddato esternamente con acqua. La reazione, vivace all'inizio, prosegue fino a completa dissoluzione del cloruro acido. Si fa riposare la soluzione per circa 30 ore, si svapora accuratamente l'alcool sotto vuoto, si lava il residuo prima con soluzione satura di bicarbonato e poi con acqua ed infine si essicca il prodotto su piatto poroso. L'estere è del tutto simile a quello ottenuto precedentemente. La resa 90% circa.

All'analisi:

trov. $\%$: J 43,19
per $\text{C}_6\text{H}_5\text{J}(\text{OH})(\text{COOC}_2\text{H}_5)$ calc. $\%$: J 43,48

Preparazione estere propilico

I° metodo — 4 g. di acido 5-iodosalicilico sono stati sciolti in 80 cc. di alcool propilico assoluto in un palloncino collegato con l'apparecchio di produzione dell' HCl gassoso e secco.

La temperatura del bagno esterno è stata tenuta a $96^{\circ} - 98^{\circ}$. Per quanto riguarda la durata del gorgogliamento è stato seguito quanto fatto per l'estere etilico. Si fa riposare la soluzione per circa 30 ore. Si svapora accuratamente la soluzione sotto vuoto fino a scomparsa dell' HCl . Nel palloncino resta un residuo oleoso che viene ripreso con etere, dibattuto con soluzione satura di bicarbonato e con acqua; la soluzione eterica viene seccata su Na_2SO_4 anidro, e svaporata ed il residuo è distillato sotto vuoto. Abbiamo raccolto la frazione bollente a $122^{\circ} - 123^{\circ}$ C a 2 mm. di pressione. Il distillato si presenta come un olio giallo paglierino con odore caratteristico. Resa 60% circa.

II° metodo. — 8 g. di cloruro acido sono posti a reagire con 12 cc. di alcool propilico assoluto in un palloncino fornito di allunga e tubo a CaCl_2 . La reazione è meno vivace di quella descritta precedentemente e per dissolvere completamente il cloruro acido è necessario un leggero riscaldamento. Si fa riposare la soluzione per circa 30 ore, si svapora accuratamente sotto vuoto fino a che non si sente odore di HCl . Nel palloncino resta un residuo oleoso che viene trattato come descritto precedentemente. Il prodotto è del tutto simile a quello ottenuto precedentemente. La resa è del 90% circa.

All' analisi :

trov. $\%$: J 40,72
per $C_6H_3J(OH)(COOC_3H_7)$ calc. $\%$: J 41,48

Preparazione dell'estere isopropilico

I° metodo. — 4 g. di acido 5-iodosalicilico sono stati disciolti in 80 cc. di alcool propilico assoluto in un palloncino collegato con l'apparecchio di produzione dell'HCl gassoso e secco.

La temperatura del bagno esterno viene mantenuta sui 90° e per la durata del riscaldamento viene eseguito quanto fatto per l'estere etilico. La soluzione viene fatta riposare per circa 40 ore. Svaporata la soluzione sotto vuoto si è ottenuto un residuo cristallino che, come fatto prima, viene trattato con soluzione satura di bicarbonato, lavato con acqua, messo ad asciugare su piatto poroso e cristallizzato da alcool. Si è ottenuto ben cristallizzato in prismi bianchi a p. f. $73^\circ,5 - 74^\circ C$.

Resa circa il 60 $\%$.

II° metodo. — 10 g. di cloruro acido sono posti a reagire con 15 cc. di alcool isopropilico assoluto in un palloncino munito di allunga e di tubo a $CaCl_2$. La reazione inizia a freddo e viene completata riscaldando leggermente la soluzione. Si fa riposare la soluzione per circa 30 ore, si svapora l'alcool sotto vuoto, si tratta il residuo come descritto nel I° metodo. Si ottiene dopo la cristallizzazione un prodotto del tutto simile a quello ottenuto precedentemente. La resa è del 95 $\%$ circa.

All' analisi :

trov. $\%$: J 40,00
per $C_6H_3J(OH)(COOC_3H_7)$ calc. $\%$: J 41,48

Preparazione dell'estere butilico

I° metodo. — 2,6 g. di acido 5-iodosalicilico sono stati sciolti in 80 cc. di alcool butilico nor. e la soluzione versata nel palloncino di reazione collegato con l'apparecchio di produzione dell'HCl gassoso e secco.

La temperatura del bagno esterno viene mantenuta tra $110^\circ - 120^\circ C$ e la durata complessiva del riscaldamento è di circa 4 ore. La soluzione vien fatta riposare per circa 48 ore. Svaporato l'alcool si è ottenuto un residuo oleoso che viene trattato come descritto per l'estere propilico. Il residuo viene distillato due volte sotto vuoto e viene raccolta la frazione bollente tra $134^\circ - 136^\circ C$ a 2 mm. (praticamente tutto il prodotto).

Esso si presenta come un olio giallo con un odore sui generis. Resa 50 $\%$ circa.

II^o metodo. — 10 g. di cloruro acido sono posti a reagire come prima descritto, con 15 cc. di alcool butilico nor. La reazione inizia a caldo e dopo qualche minuto tutto il cloruro acido è disciolto. La soluzione si fa riposare per circa 30 ore; si svapora l'alcool sotto vuoto ed il residuo si tratta come nel I^o metodo. Il prodotto ottenuto è del tutto simile a quello ottenuto con l'altro metodo. La resa è del 90 % circa.

All'analisi:

	trov. %: J 40,00
per $C_6H_3J(OH)(COOC_4H_9)$	calc. %: J 39,66

Preparazione dell'estere allilico

6 g. di cloruro acido sono trattati, con le note modalità, con 10 cc. di alcool allilico. La reazione avviene a caldo e si riscalda, con bagno esterno a 80° C, per circa 30 '. Si lascia quindi riposare la soluzione per circa 30 ore e si procede come fatto per gli esteri precedentemente descritti. L'olio viene distillato sotto vuoto e passa a 123° C a 2 mm. L'estere si presenta come un olio giallo-paglierino di odore penetrante.

All'analisi:

	trov. %: J 40,00
per $C_6H_5(OH)(COOC_3H_5)$	calc. %: J 41,65

Preparazione estere butilico sec. o metil-etilico-carbinolico

7 g. di cloruro acido sono disciolti in 10 cc. di alcool butilico sec. come descritto prima. Il bagno esterno è mantenuto a 90° C. Per la durata di 30' minuti circa. Dopo un riposo di 30 ore circa si procede come descritto precedentemente. L'olio residuo viene distillato sotto vuoto e passa a 122° C a 1 mm. L'estere si presenta come un olio di colore giallo, di odore caratteristico. La resa è di circa 89 %.

All'analisi:

	trov. %: J 39,75
per $C_6H_3J(OH)(COOC_4H_9)$	calc. %: J 39,66

Preparazione dell'estere isobutilico prim.

5 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool isobutilico primario e trattati come fatto per l'estere precedentemente descritto. L'olio ottenuto, distillato sotto vuoto, passa a 140° C a 5 mm. La resa è di circa l'87 %.

All'analisi:

	trov. %: J 40,00
per $C_6H_3J(OH)(COOC_4H_9)$	calc. %: J 39,66

Preparazione dell'estere isobutilico terz.

4 g. di cloruro acido sono stati disciolti in 10 cc. di alcool isobutilico terziario e trattati come descritto precedentemente. Il residuo era costituito da un prodotto cristallino che è stato trattato come descritto per l'estere metilico. Cristallizzato da alcool l'estere si presenta in bei prismi bianchi a p. f. 79°-80 C. La resa è di circa l'80 %.

All'analisi:

	trov. % : J 38,83
per $C_6H_5J(OH)(COOC_4H_9)$	calc. % : J 39,66

Preparazione estere amilico normale

7 g. di cloruro acido sono stati disciolti in 10 cc. di alcool amilico normale e trattati come descritto precedentemente. Si è ottenuto un residuo costituito da un olio che è stato distillato sotto vuoto ed è passato a 140° C per la pressione di 1 mm. La resa è del 90 % circa.

All'analisi:

	trov. % : J 37,58
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione estere amilico secondario

7 g. di cloruro acido vengono disciolti, con le note modalità, in 10 cc. di alcool amilico secondario e trattati come descritto precedentemente. Si è ottenuto un residuo costituito da un prodotto oleoso che è stato distillato sotto vuoto ed è passato a 130° C a 2 mm. Resa 90 % circa.

All'analisi:

	trov. % : J 37,49
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione estere amilico attivo

7 g. di cloruro acido sono trattati con 10 cc. di alcool amilico attivo seguendo il metodo prima descritto. L'olio distilla, sotto vuoto, alla temperatura di 123° C a 2 mm. La resa della preparazione è di circa 87 %.

All'analisi:

	trov. % : J 37,97
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione estere isoamilico secondario

7 g. di cloruro acido sono stati sciolti in 10 cc. di alcool isoamilico secondario (isopropil-metil-carbinolo) e trattati come descritto precedentemente. Si è ottenuto un olio che distilla, sotto vuoto, a 144° - 145° a 2 mm. La resa è dell'85 % circa.

All'analisi :

	trov. % : J 38,11
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione dell'estere esilico normale

7 g. di cloruro acido sono trattati con 10 cc. di alcool amilico attivo, seguendo il metodo prima descritto. L'olio residuo distilla sotto vuoto, alla temperatura di 123° C a 2 mm. La resa della preparazione è di circa 87 %.

All'analisi :

	trov. % : J 37,97
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione estere isoamilico sec.

7 g. di cloruro acido sono stati sciolti in 10 cc. di alcool isoamilico sec. (isopropilmetil carbinolo) e trattati come descritto precedentemente. Si è ottenuto un'olio che distilla, sotto vuoto, a 144° - 145° C a 2 mm. La resa è dell'85 % circa.

All'analisi :

	trov. % : J 38,11
per $C_6H_5J(OH)(COOC_5H_{11})$	calc. % : J 38,00

Preparazione dell'estere esilico norm.

7 g. di cloruro acido sono stati sciolti in 10 cc. di alcool esilico norm. e trattati come descritto precedentemente. Si è ottenuto un residuo costituito da un olio che, distilla sotto vuoto, passa alla temperatura di 150° C a 1 mm. La resa è del 95 % circa.

All'analisi :

	trov. % : J 36,00
per $C_6H_5J(OH)(COOC_6H_{13})$	calc. % : J 36,47

Preparazione dell'estere esilico sec.

Preparato da 7 g. di cloruro acido e 10 cc. di alcool esilico sec. (metilamilico) secondo la tecnica precedentemente descritta. Il prodotto otte-

nuto si presenta come un olio, che distillato sotto vuoto, passa a 131° C a 1 mm. La resa è quasi teorica.

All' analisi:

	trov. % : J 36,67
per $C_6H_3J(OH)(COOC_6H_{13})$	calc. % : J 36,47

Preparazione dell'estere isoecilico

7 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool isoecilico e trattati come descritto precedentemente. Il prodotto ottenuto è costituito da un olio che, distillato sotto vuoto, passa a 144° C a 2 mm. La resa è dell' 89 % circa.

All' analisi:

	trov. % : J 36,46
per $C_6H_3J(OH)(COOC_6H_{13})$	calc. % : J 36,47

Preparazione estere ottilico norm.

7 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool ottilico norm. e trattati come descritto precedentemente. Durante il riposo il prodotto è solidificato. Abbiamo svaporato l'alcool sotto vuoto (il prodotto fonde a bassa temp.), fatto raffreddare il residuo solido è stato messo su piatto poroso.

Il prodotto cristallizzato da alcool etilico si presenta in prismi setacei bianchi che fondono a 42° C. La resa è dell' 85 % circa.

All' analisi:

	trov. % : J 33,25
per $C_6H_5J(OH)(COOC_8H_{17})$	calc. % : J 33,76

Preparazione estere ottilico sec.

7 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool ottilico sec. o caprilico e trattati come descritto precedentemente. Il residuo, costituito da un prodotto oleoso viene distillato sotto vuoto e passa a 150° - 152° C a 2 mm. La resa è del 90 % circa.

All' analisi:

	trov. % : J 32,96
per $C_6H_5J(OH)(COOC_8H_{17})$	calc. % : J 33,76

Preparazione estere isoottilico

7 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool isoottilico e trattati come descritto precedentemente. Il residuo, costituito da un olio, viene distillato sotto vuoto e passa a 154° C a 2 mm. La resa è del 92 % circa.

All' analisi:

	trov. % : J 32,78
per $C_6H_5J(OH)(COOC_8H_{17})$	calc. % : J 33,76

Preparazione dell'estere decilico norm.

7 g. di cloruro acido sono sciolti in 10 cc. di alcool decilico norm. e trattati come descritto precedentemente. Il prodotto si comporta come l'estere ottilico nor. e abbiamo usato lo stesso metodo. Cristallizzato da alcool il prodotto si presenta in prismi bianchi che fondono a 42,5-43,5° C.

All'analisi :

	trov. $\%$: J 30,51
per $C_6H_3J(OH)(COOC_{10}H_{21})$	calc. $\%$: J 31,41

Preparazione dell'estere dodecilico norm.

7 g. di cloruro acido vengono sciolti in 10 cc. di alcool dodecilico norm. e trattato come descritto precedentemente. L'estere si comporta come l'ottilico nor. ed è stato trattato come quello. Alla fine abbiamo ottenuto un solido bianco di consistenza cerosa che fonde a 41-42° C.

All'analisi :

	trov. $\%$: J 28,47
per $C_6H_3J(OH)(COOC_{12}H_{25})$	calc. $\%$: J 29,37

Nella tabella che segue, sono ricapitolate le caratteristiche fondamentali di tutti gli esteri da noi ottenuti e sperimentati.

Valutazione dell'attività antimicrobica

La valutazione dell'attività antimicrobica degli esteri dell'acido 5-iodo-salicilico descritti è stata eseguita dal dottor LAURENZA dell'Istituto di Igiene di questa Università, che gentilmente ci ha fornito i risultati conclusivi che qui di seguito riferiamo. Le prove sono state eseguite su quattro ceppi di « *Escherichia coli* » ed altrettanti di b. tifico, di stafilococco aureo e di b. del carbonchio. Come terreni di cultura sono stati usati l'agar semplice e il brodo comune.

Per il saggio in agar delle sostanze liquide, si è adoperata la tecnica dell'agar-buco.

In tubi contenenti 10 cc. di agar portato a 45° C. Venivano aggiunti cc. 0,1 di una sospensione, in soluzione fisiologica sterile, di patina del germe considerato, proveniente da agarcoltura di 24 ore, contenente all'incirca 10 miliardi di germi per cc.

Dopo accurato mescolamento il tutto veniva versato in capsule Petri e lasciato solidificare.

Nelle piastre di agar-germi così ottenuti venivano quindi praticati, mediante un foratappi sterile, dei pozzetti di 1 cm. di diametro in ognuno dei quali si facevano cadere, mediante una pipetta Pasteur, 10 gocce della sostanza. Per le sostanze solide si è provveduto a poggiarne una punta di spatola sulla superficie dell'agar-germi; a solidificazione avvenuta.

Dopo 24 ore di incubazione a 37° C veniva o meno notata attorno alla sostanza considerata, la formazione di un alone di inibizione.

Limitatamente allo stafilococco si è voluto poi stabilire, nei casi in cui si verificava, se la zona di inibizione è l'espressione di una azione battericida o batteriostatica della sostanza. A tale scopo sono state allestite subculture in brodo standard con pezzetti di agar prelevati lungo i raggi delle zone chiare. Lo sviluppo o meno del germe dava conto della uccisione o della inibizione avvenuta. Si è potuto così accertare che tutte le sostanze oleose hanno azione battericida sullo stafilococco, ad eccezione dell'estere butilico ed esilico normale che si limiterebbero a inibirne lo sviluppo.

Le prove in brodo sono state condotte aggiungendo a 5 cc. di terreno culturale 10 gocce di sostanza oleosa e circa 1 g. di sostanza solida.

I tubi insemizzati con 0,1 cc. di sospensione del germe considerato ottenuta da cultura di 24 ore su agar e contenente circa 10 miliardi di germi per cc., venivano collocati in termostato a 37° C.

Dopo 24 ore si procedeva alla lettura delle culture. I risultati si possono così riassumere:

1) Gli esteri metilico, etilico, isopropilico, isobutilico, terziario, ottilico normale, decilico normale, dodecilico normale, costituiti da sostanze solide, non hanno messo in evidenza alcuna azione sullo sviluppo della E.



ESTERI ALIFATICI DELL' ACIDO 5-IODOSALICILICO

N	Composti	Sostituenti R.	P. Mol.	% J teor. % J trov.	P. F.	P. E.	Forma cristallina Colore	Solubilità
1	Est. Metilico	$-\text{CH}_3$	277,98	45,66 te. 45,13 tr.	76,5-77,5°		Prismi bianchi	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; sol. a caldo in glicerina.
2	» Etilico	$-\text{C}_2\text{H}_5$	292,002	43,48 te. 43,19 tr.	72-72,5°		Aghi setacci bianchi	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; sol. a caldo in glicerina.
3	» Allilico	$-\text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}_2$	304,002	41,65 te. 40,00 tr.		123° a 2 mm.	Olio giallo paglierino	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
4	» Propilico	$-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	306,018	41,48 te. 40,72 tr.		122-123° a 2 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
5	» Isopropil.	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ -\text{CH} \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array}$	306,018	41,48 te. 40,00 tr.	73,5-74°		Prismi bianchi	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; sol. a caldo in glicerina.
6	» Butilico	$-\text{CH}_2(\text{CH}_2)_2\text{CH}_3$	320,034	39,66 te. 40,00 tr.		134-136° a 3 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
7	» Butil. sec. o etilmetil carbinolico	$\begin{array}{c} \text{CH}_2-\text{CH}_3 \\ \diagup \\ -\text{CH} \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array}$	320,034	39,66 te. 39,75 tr.		122° a 1 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
8	» IsoButilico primario	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{CH}-\text{CH}_2 \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array}$	320,034	39,66 te. 40,00 tr.		140° a 5 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
9	» IsoButilico terz. o trimetilcarbinolico	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{C}-\text{CH}_2 \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array}$	320,034	39,66 te. 38,83 tr.	79-80°		Prismi bianchi	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.

10	» Amilico normale	$-\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_3-\text{CH}_3$	334,050	38,00 te. 37,58 tr.	140° a 1 mm.	Olio giallo paglierino	Disper. sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
11	» Amilico sec. o metilpropilcarbinolo	$\begin{array}{c} \diagup \text{CH}_2 \quad \text{CH}_2 \quad \text{CH}_3 \\ \text{CH} \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array}$	334,050	38,00 te. 37,19 tr.	130° a 2 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
12	» Amilico att.	$\begin{array}{c} \text{CH}_2 \quad \text{CH} \quad \text{CH}_2 \quad \text{CH}_3 \\ \\ \text{CH}_3 \end{array}$	334,050	38,00 te. 37,97 tr.	123° a 2 mm.	Olio giallo paglierino	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
13	» Isoamilico sec. o isopropilmetilcarbinolo	$\begin{array}{c} \diagup \text{CH}-(\text{CH}_2)_2 \\ \text{CH} \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array}$	334,050	38,00 te. 38,11 tr.	144-145° a 2 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
14	» Esilico normale	$-\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_4-\text{CH}_3$	348,066	36,47 te. 36,00 tr.	152° a 1 mm.	Olio giallo paglierino	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; insol. in glicerina.
15	» Esilico sec. o metilamilico	$\begin{array}{c} \diagup \text{CH}_3 \\ \text{CH} \\ \diagdown \text{CH}-(\text{CH}_2)_3-\text{CH}_3 \end{array}$	348,066	36,47 te. 36,67 tr.	131° a 1 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
16	» Isoesilico	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ -\text{CH}_2-\text{CH}- \\ \\ \text{CH}_2-(\text{CH}_2)_6-\text{CH}_3 \end{array}$	348,066	36,47 te. 36,46 tr.	144° a 2 mm.	Olio giallo paglierino	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
17	» Ottilico normale	$\begin{array}{c} \diagup \text{CH}_3 \\ \text{CH} \\ \diagdown (\text{CH}_2)_7-\text{CH}_3 \end{array}$	376,066	33,76 te. 33,25 tr.	42°	Prismi setacei bianchi	Discr. sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
18	» Ottilico sec.	$\begin{array}{c} \diagup \text{CH}_3 \\ \text{CH} \\ \diagdown (\text{CH}_2)_7-\text{CH}_3 \end{array}$	376,066	33,75 te. 32,96 tr.	150-152° a 2 mm.	Olio giallo	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
19	» Iso-ottilico	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ -\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH} \\ \qquad \qquad \\ (\text{CH}_2)_3-\text{CH}_3 \end{array}$	376,066	33,76 te. 32,78 tr.	154° a 2 mm.	Olio giallo paglierino	Sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
20	» Decilico normale	$-\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_8-\text{CH}_3$	404,130	31,41 te. 30,51 tr.	42,5-43,5°	Prismi bianchi	Poco sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a caldo in glicerina.
21	» Dodecilico normale	$-\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_{10}-\text{CH}_3$	432,162	29,37 te. 28,47 tr.	41-42°	Solido bianco di consistenza cerosa	Poco sol. in alcool; molto sol. in etere, acetone, benzolo; poco sol. a freddo in glicerina.

coli, del b. tifico, dello stafilococco A. e del b. del carbonchio sia nei preparati di agar che in quelli di brodo.

2) Gli altri esteri non hanno messo in evidenza alcuna azione sulle culture degli stessi germi in brodo mentre hanno esercitato una azione inibitrice sulle culture in agar che, calcolate in base all'alone di inibizione, è messa in evidenza nella tabella che segue:

TABELLA N. 2

N.	S o s t a n z e	Sviluppo in agar (alone inibiz. in mm.) del			
		Coli	Tifo	Stafilococco	Carbonchio
1	Estere allilico	2	2	2	4
2	" propilico	1	4	3	5
3	" butilico	1/2	1	4	3
4	" butilico sec.	1	1	4	3
5	" iscbutilico prim.	2	2	4	4
6	" amilico norm.	2	5	3	3
7	" " sec.	1	2	3	3
8	" " attivo	2	2	2	2
9	" iscamilico	2	2	1	3
10	" esilico norm.	1	2	2	4
11	" " sec.	1	1	3	4
12	" isoesilico	1	2	2	4
13	" ottilico sec.	1	1	1	4
14	" isoottilico	non inib.	non inib.	non inib.	2

CONCLUSIONI

Dai dati esposti risulta evidente la inattività, sia in brodo che in agar, degli esteri solidi. Tale comportamento però non si può precisare se dipenda dalla costituzione chimica di essi oppure dalla impossibilità che presentano a diffondere nei terreni adoperati.

Questa seconda ipotesi, a nostro avviso, è avvalorata dai risultati ottenuti con le sostanze liquide, le quali hanno un'azione più o meno rimarchevole, a seconda del germe considerato e della loro caratteristica chimica, in agar mentre in brodo sono risultate del tutto inattive (le catene laterali rendono tali sostanze idrofobe).

Evidentemente, in brodo, le sostanze non avevano alcuna possibilità di diffondere e la loro azione è risultata negativa come per quelle allo stato solido; in agar, a differenza dei preparati solidi, quelli oleosi hanno potuto diffondere, anche se in grado limitatissimo, quindi interferire nello sviluppo dei germi considerati.

Per le stesse ragioni non reputiamo realmente indicativa dell'attività di ciascuna sostanza, l'entità dell'alone di inibizione da essa provocato.

Le ricerche proseguono allo scopo di applicare tecniche adatte alle caratteristiche di solubilità degli esteri da noi preparati.

*Napoli, Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologia dell'Università,
marzo 1958.*

CRISTALLI DI SALGEMMA CON SFALDATURA ROMBODODECAEDRICA

*Nota del prof. Antonio Parascandola,
presentata dal socio A. Scherillo*

(Adunanza del dì 7 giugno 1958)

Sunto — Si descrivono in cristalli di salgemma «incrinature» parallele alle facce del rombododecaedro, che vengono interpretate come tracce di una possibile sfaldatura secondo } 110 {.

Nel lontano 1923 avevo potuto osservare in una serie di cristalli di salgemma di Lungro che mi erano stati gentilmente donati, un campione particolarmente interessante perchè presentava una serie di «incrinature» parallele alle facce del rombododecaedro. Si trattava di un cristallo di dimensioni notevoli, ma non certo eccezionali (circa cm $6 \times 6 \times 2$) che, pur avendolo mostrato a qualche amico studioso, non ho mai descritto perchè mi ripromettevo di stabilire se si trattasse di un carattere morfologico unico o se, invece, le stesse incrinature fossero presenti anche in altri cristalli della medesima località.

Disgraziatamente, dopo le traversie a cui è andato soggetto con la guerra l'Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli, non mi è stato più possibile rinvenire il cristallo in questione, e ormai avevo rinunciato al proposito di descriverlo, quando in una nuova raccolta di campioni di salgemma di Lungro, che ho ricevuto in questi ultimissimi tempi, ho avuto la lieta sorpresa di ritrovare le stesse «incrinature» rombododecaedriche in un altro cristallo di dimensioni ancora maggiori del primo (cm $10 \times 9 \times 4$), che è quello riprodotto nella tavola, dove è evidentissima una serie di queste incrinature, accanto alle tracce di sfaldatura secondo } 100 {.

Tali incrinature, incontrandosi appunto con le tracce della sfaldatura cubica, determinano dei solidi di sfaldatura con delle sezioni triangolari o trapezoidali, insolite per il salgemma.

Già l'aver ritrovato la stessa caratteristica morfologica in due cristalli diversi era un fatto di un certo interesse; ma ancor più interessante è che, avendo esaminato con attenzione anche gli altri cristalli di Lungro che mi erano stati donati contemporaneamente, ho potuto notare anche in altri le medesime incrinature, per quanto non così vistose; fra questi è il campione (cm $4 \times 3 \times 2$) riprodotto nella tavola annessa, in cui sono evidenti due incrinature rombododecaedriche, tra loro ortogonali.



Ma vi è di più. Infatti, estese le mie ricerche anche a cristalli di salgemma di differenti provenienze, ho potuto constatare che il carattere non è esclusivo di quelli di Lungro. Per es., in un cristallo di Stassfurt, in parte incolore, in parte azzurro-violaceo, ho osservato un sistema di incrinature rombododecaedriche pure molto nitide. Poichè il cristallo presenta sulle facce cubiche le note figure di corrosione, le incrinature sono parallele ai contorni di tali figure.

Da questi fatti sono portato a concludere che le « incrinature » in questione abbiano un preciso significato morfologico e debbano essere interpretate come tracce di una sfaldatura secondo il rombododecaedro, molto meno facile dell'altra secondo il cubo. Tale sfaldatura, a quanto mi risulta, non è citata dagli Autori, ma è teoricamente possibile.

Infatti, come è noto, nella cella del salgemma, la massima distanza reticolare ($1/2 a$) si ha tra i piani (100) che sono costituiti da ioni Na^+ e Cl^- . I piani (110) si seguono a distanza minore ($1/4 a \sqrt{2}$), ma anch'essi sono costituiti da ioni Na^+ e Cl^- . Invece i piani (111), non solo si seguono a distanza reticolare ancora minore ($1/6 a \sqrt{3}$) ma con alternanza di piani Na^+ e Cl^- .

Aggiungerò che le lamine di sfaldatura, osservate al microscopio, risultano perfettamente isotrope, e ciò mi conduce a escludere che vi sia un rapporto tra questa sfaldatura e i fenomeni descritti per i cristalli di salgemma da PANICHI ¹⁾.

Ad ogni modo, quale che sia l'interpretazione da darsi a questa caratteristica morfologica, ho creduto bene di segnalarela, tanto più trattandosi di una specie mineralogica tanto nota e tanto studiata quale è il salgemma.

Napoli, Istituto di Mineralogia dell'Università, Giugno 1958.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Sono riprodotti due cristalli di salgemma del giacimento di Lungro, che presentano « incrinature », parallele alle facce di rombododecaedro.

Le dimensioni degli originali sono, per il cristallo superiore, $\text{cm. } 10 \times 9 \times 4$, per l'inferiore $\text{cm. } 4 \times 2 \times 3$.

¹⁾ PANICHI U. *Sul dimorfismo del salgemma e della silvite*. "Periodico di Mineralogia", vol. 4, pag. 25-33 - Roma, 1933.

SOPRA I PROBLEMI AI LIMITI PER ALCUNI SISTEMI DI EQUAZIONI
DIFFERENZIALI NON LINEARI

Nota di C. Corduneanu, presentata dal socio C. Miranda

(Adunanza del dì 7 giugno 1958)

Sunto. — Si tratta di alcuni problemi ai limiti, lineari o non lineari, per qualche classe di sistemi di equazioni differenziali. Si adopera il metodo dei punti uniti ad un sistema linearizzato, equivalente al sistema iniziale.

I problemi ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali hanno fatto finora l'oggetto di alcuni lavori molto interessanti. Risultati di una grande generalità sono contenuti nei lavori di R. CONTI [1] e G. STAMPACCHIA [2] *). Nel lavoro di G. STAMPACCHIA si tratta anche il caso dei problemi con condizioni ai limiti non lineari. Ma data la complessità del problema, esistono ancora casi importanti che non rientrano nei risultati conosciuti. Ad esempio, l'esistenza di una soluzione per il problema ai limiti $y'' = f(x, y)$, $y'(a) = y'(b) = 0$, non risulta dai teoremi di R. CONTI e G. STAMPACCHIA.

In questa Nota, mostreremo l'esistenza di almeno una soluzione per alcuni problemi ai limiti, lineari o non lineari, utilizzando il metodo dei punti uniti. Questo metodo verrà applicato dopo un'opportuna linearizzazione delle equazioni differenziali ed anche delle condizioni ai limiti, quando queste ultime saranno non lineari. Per questa ragione, ci saranno utili alcune considerazioni collegate alla teoria delle equazioni differenziali lineari.

1. Consideriamo l'equazione

$$(1) \quad y'' = p(x)y + q(x),$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due funzioni definite sull'intervallo $[a, b]$, finite in ogni punto di $[a, b]$ ed ivi soddisfacenti alle disuguaglianze $p(x) \geq m > 0$, $|q(x)| \leq Q$.

*) Vorrei ringraziare il Prof. C. MIRANDA per aver attirato la mia attenzione sull'affinità che esisteva fra questi risultati e quelli contenuti in una prima forma del mio lavoro. Questo mi ha portato alla presente forma del lavoro.

Se l'equazione (1) ammette una soluzione $y(x)$, definita in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$, soddisfacente le condizioni ai limiti

$$(2) \quad \alpha' y'(a) + \alpha y(a) = 0, \quad \beta' y'(b) + \beta y(b) = 0,$$

dove $\alpha', \alpha, \beta', \beta$ sono quattro numeri tali che

$$(3) \quad \alpha'^2 + \alpha^2 > 0, \quad \alpha' \alpha \leq 0, \quad \beta'^2 + \beta^2 > 0, \quad \beta' \beta \geq 0,$$

si avrà per questa soluzione

$$(4) \quad \|y(x)\| \leq \frac{Q}{m},$$

essendo

$$\|y(x)\| = \sup |y(x)|, \quad a \leq x \leq b.$$

La formula di maggiorazione (4) è un caso particolarissimo delle formule stabilite dal PRONE [5] per le equazioni ellittico-paraboliche.

Facciamo ancora l'osservazione che dalla (4) segue l'unicità della soluzione soddisfacente alle condizioni (2) e che la continuità delle funzioni $p(x)$ e $q(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ è una condizione sufficiente per l'esistenza della soluzione $y(x)$.

Siano adesso $p_n(x)$ e $q_n(x)$, $n \geq 1$, due successioni di funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$, tali che $p_n(x) \geq m > 0$, $n \geq 1$. L'equazione

$$(5) \quad y'' = p_n(x) y + q_n(x), \quad n \geq 1,$$

ammette una ed una sola soluzione $y_n(x)$, soddisfacente alle condizioni ai limiti (2).

LEMMA I. — *Ammettiamo che*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = p(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = q(x),$$

uniformemente sull'intervallo $[a, b]$. Se $y(x)$ è la soluzione dell'equazione (1), soddisfacente le condizioni ai limiti (2) si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x),$$

uniformemente sull'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $y_n(x) - y(x)$, $n \geq 1$, verifica l'equazione

$$(y_n - y)'' = p(y_n - y) + (p_n - p)y + q_n - q$$

e le condizioni ai limiti (2). Dunque, possiamo applicare la formula di maggiorazione (4). Si avrà

$$\begin{aligned} \|y_n(x) - y(x)\| &\leq \frac{1}{m} \|p_n(x) - p(x)\| \cdot \|y(x)\| \\ &+ \frac{1}{m} \|q_n(x) - q(x)\|. \end{aligned}$$

Questa limitazione ci mostra che la relazione (7) ha sempre luogo, sotto le dichiarate condizioni.

Consideriamo ora le condizioni ai limiti

$$(2') \quad y'(a) - hy(a) = A, \quad y'(b) + ky(b) = B,$$

essendo h e k due numeri positivi. Sia $\lambda = \min \{h, k\}$. Dalle formule di maggiorazione stabilite in [3], si deduce subito la formula

$$(8) \quad \|y(x)\| \leq \frac{Q}{m} + \frac{1}{\lambda} \max \{ |A|, |B| \},$$

essendo $y(x)$ la soluzione dell'equazione (1) soddisfacente le condizioni ai limiti (2').

Questa formula ci permette di dimostrare il seguente

LEMMA 2. — *La conclusione del lemma 1 vale anche nel caso in cui $y_n(x)$ è la soluzione dell'equazione (5), soddisfacente le condizioni ai limiti*

$$(2'') \quad y'(a) - h_n y(a) = A_n, \quad y'(b) + k_n y(b) = B_n,$$

essendo $y(x)$ la soluzione dell'equazione (1) soddisfacente le condizioni (2'), a condizione che, oltre (6), si abbia

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

2. Ciò premesso, passiamo ai sistemi di equazioni differenziali della forma

$$(10) \quad y_i'' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ soddisfano le seguenti condizioni:

I. Esse sono continue nell'insieme

$$(\bar{D}) \quad a \leq x \leq b, \quad |y_i| \leq H, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

essendo H un numero positivo;

II. Le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$ sono continue in D , e soddisfano ivi le disuguaglianze

$$(11) \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \geq m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

III. Essendo

$$K = \max_i \left\{ \sup |f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n)| \right\},$$

$$(x, y_1, \dots, y_n) \in \bar{D},$$

si avrà

$$(12) \quad K \leq mH.$$

Per il sistema (10), consideriamo le condizioni ai limiti

$$(13) \quad \alpha_i' y_i'(a) + \alpha_i y_i(a) = 0, \quad \beta_i' y_i'(b) + \beta_i y_i(b) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

i numeri $\alpha_i', \alpha_i, \beta_i', \beta_i$ essendo tali che

$$\alpha_i'^2 + \alpha_i^2 > 0, \quad \alpha_i' \alpha_i \leq 0, \quad \beta_i'^2 + \beta_i^2 > 0, \quad \beta_i' \beta_i \leq 0. \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Osserviamo ora che le equazioni del sistema (10) possono essere scritte sotto la forma linearizzata equivalente

$$(14) \quad y_i'' = g_i(x, y_1, \dots, y_n) y_i + f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n),$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

facendo uso di un ben noto lemma dell' HADAMARD. Le funzioni $g_i(x, y_1, \dots, y_n)$ saranno continue in D ed ivi soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(15) \quad g_i(x, y_1, \dots, y_n) \geq m > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ogni soluzione del problema sarà un' applicazione continua dell' intervallo $[a, b]$ nello spazio euclideo n -dimensionale R^n . Sia $C([a, b], R^n)$ lo spazio di queste applicazioni, con la topologia della convergenza uniforme. Questa topologia può essere definita dalla norma

$$\| (y_1, \dots, y_n) \| = \max \{ \| y_i(x) \| \}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si tratta dunque di uno spazio di Banach.

Sia \mathfrak{M} l' insieme delle applicazioni appartenenti allo spazio $C([a, b], R^n)$, tale che si abbia

$$(16) \quad \| (y_1, \dots, y_n) \| \leq H.$$

L'insieme \mathfrak{M} è evidentemente limitato, chiuso e convesso nello spazio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Per ogni $(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{M}$, sia (y_1, \dots, y_n) l'applicazione di $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, definita per mezzo delle equazioni

$$(17) \quad y_i'' = g_i(x, u_1, \dots, u_n) y_i + f_i(x, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

con le condizioni ai limiti (13). L'applicazione (y_1, \dots, y_n) è univocamente determinata, come si deduce subito dalle considerazioni che vengono esposte nel numero precedente. Sia \mathfrak{A} l'operatore definito per mezzo delle (13) e (17).

La continuità dell'operatore \mathfrak{A} risulta facilmente dal lemma 1.

Osserviamo ancora che dalla condizione III riesce

$$\mathfrak{A} \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M},$$

tenendo presente la formula di maggiorazione (4).

Resta da dimostrare che l'insieme $\mathfrak{A} \mathfrak{M}$ è compatto nello spazio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. All'uopo, osserviamo che l'insieme $\{(y_1'', \dots, y_n''), (y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A} \mathfrak{M}\}$ è uniformemente limitato, come si vede subito dalle (17). Essendo anche $\mathfrak{A} \mathfrak{M}$ un insieme limitato nello spazio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, possiamo affermare che l'insieme $\{(y_1', \dots, y_n'), (y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A} \mathfrak{M}\}$ è uniformemente limitato. Infatti, siano $x_0, x_1, x_0 < x_1$ due qualsiasi numeri dell'intervallo $[a, l]$. Possiamo scrivere

$$y_i(x_1) = y_i(x_0) + (x_1 - x_0) y_i'(x_0) + \frac{1}{2} (x_1 - x_0)^2 y_i''(\xi_i), \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Dunque, l'insieme $\{(y_1'(x_0), \dots, y_n'(x_0)), (y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A} \mathfrak{M}\}$, è un insieme limitato nello spazio \mathbb{R}^n . Essendo

$$y_i'(x) = y_i'(x_0) + \int_{x_0}^x y_i''(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

risulta che l'insieme $\{(y_1', \dots, y_n'), (y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A} \mathfrak{M}\}$ è uniformemente limitato. Quindi, l'insieme $\mathfrak{A} \mathfrak{M}$ è compatto nello spazio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, essendo le funzioni di quest'insieme uniformemente limitate ed ugualmente continue.

Dunque, l'operatore \mathfrak{A} e l'insieme \mathfrak{M} soddisfano tutte le condizioni richieste dall'applicazione del teorema di Schauder sui punti uniti. Possiamo affermare allora l'esistenza di almeno un'applicazione (y_1, \dots, y_n) tale che le equazioni (14) e le condizioni ai limiti (13) siano soddisfatte,

cioè, l'esistenza di almeno una soluzione per il sistema (10) con le condizioni ai limiti (13).

Abbiamo dimostrato il seguente

TEOREMA 1. — *Per il sistema differenziale (10), siano soddisfatte le ipotesi I, II, III.*

Allora esiste almeno una soluzione del sistema, soddisfacente le condizioni ai limiti (13).

3. Limitiamoci al caso di una sola equazione, per stabilire l'unicità della soluzione e per considerare ancora i problemi ai limiti non omogenei.

Consideriamo l'equazione

$$(19) \quad y'' = f(x, y),$$

dove la funzione $f(x, y)$ è continua nell'insieme $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$ ed ammette ivi una derivata continua rispetto a y , tale che $\frac{\partial f}{\partial y} \geq m > 0$.

Dal teorema 1 si deduce senza difficoltà l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione (19), soddisfacente le condizioni ai limiti (2).

Siano adesso le condizioni più generali

$$(20) \quad \alpha' y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta' y'(b) + \beta y(b) = B,$$

essendo A e B due numeri reali arbitrarii. Supponiamo ancora che le condizioni (13) siano verificate.

Esiste una funzione $\eta(x)$, continuamente derivabile del secondo ordine sull'intervallo $[a, b]$, soddisfacente le condizioni ai limiti (20).

Il cambiamento di funzione $y = Y + \eta$, ci conduce all'equazione

$$(21) \quad Y'' = f(x, Y + \eta)'',$$

con le condizioni ai limiti (2) per la funzione Y.

Esiste dunque almeno una soluzione dell'equazione (19), soddisfacente le condizioni ai limiti (20).

Per dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione (19), con le condizioni (20), possiamo utilizzare di nuovo il metodo di linearizzazione. Ammettiamo l'esistenza di almeno due soluzioni, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, del nostro problema. La funzione $y_1(x) - y_2(x)$ soddisfa ad un'equazione della forma

$$(y_1 - y_2)'' = f_1(x, y_1, y_2)(y_1 - y_2),$$

essendo $f_1(x, y_1, y_2)$ una funzione continua, tale che $f_1 \geq m > 0$. Ma la funzione $y_1(x) - y_2(x)$ soddisfa anche le condizioni ai limiti (2). Dunque, tenendo presente l'osservazione che abbiamo fatto nel numero 1, avremo $y_1(x) = y_2(x)$.

Prima di considerare dei problemi ai limiti corrispondenti ad alcune condizioni ai limiti non lineari, vogliamo sottolineare che non abbiamo fatto nessuna ipotesi rispetto alla limitazione superiore della funzione $\frac{\partial f}{\partial y}$. Cioè, nell'equazione linearizzata $y'' = g(x, y)y + f(x, 0)$ che si deduce dall'equazione (19), la funzione $g(x, y)$ può non soddisfare alla condizione di CARATHEODORY, come si richiede nei lavori di R. CONTI e G. STAMPACCHIA.

4. Consideriamo di nuovo il sistema differenziale (10) ed ammettiamo le seguenti ipotesi:

I') Le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ sono continue nell'insieme (\bar{D})

$$(\bar{D}) \quad a \leq x \leq b, \quad |y_i| \leq H, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

II') Le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$ sono continue in \bar{D} e soddisfano ivi alle disuguaglianze (11).

Supponiamo adesso che le condizioni ai limiti abbiano la forma

$$(22) \quad \begin{aligned} y'_i(a) &= \varphi_i(y_1(a), \dots, y_n(a)), \\ y'_i(b) &= \psi_i(y_1(b), \dots, y_n(b)), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e valgano anche le ipotesi:

III') Le funzioni $\varphi_i(y_1, \dots, y_n)$, $\psi_i(y_1, \dots, y_n)$ sono continue per tutti i valori delle variabili y_1, \dots, y_n , tali che $|y_i| \leq H$, $i = 1, 2, \dots, n$;

IV') Le derivate $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i}$ e $\frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}$ sono continue e soddisfano alle limitazioni

$$(23) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \geq \lambda, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} \leq -\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

essendo λ un numero positivo.

Sia

$$\begin{aligned} M &= \max_i \left\{ \sup | \varphi_i(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) |, \right. \\ &\quad \left. \sup | \psi_i(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) | \right\}, \quad |y_i| \leq H, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Il numero K abbia lo stesso significato che nel numero 2.

V') Valgano le disuguaglianze

$$(24) \quad M < \lambda H, \quad K \leq m \left(H - \frac{1}{\lambda} M \right).$$

Per dimostrare l'esistenza di almeno una soluzione del sistema (10), soddisfacente le condizioni ai limiti (22), seguiremo il metodo già utilizzato nel numero 2. Questa volta, avremo bisogno del lemma 2 e della formula di maggiorazione (8).

Vogliamo soltanto dire come può definirsi l'operatore che ammetta come elemento unito, una soluzione del problema.

Anzitutto, dobbiamo linearizzare le condizioni ai limiti (22). All'uopo, si applica lo stesso lemma dell'HADAMARD e può scriversi:

$$(22') \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i'(a) = \Phi_i(y_1(a), \dots, y_n(a)) y_i(a) + \\ \quad + \varphi_i(y_1(a), \dots, y_{i-1}(a), 0, y_{i+1}(a), \dots, y_n(a)), \\ y_i'(b) = \Psi_i(y_1(b), \dots, y_n(b)) y_i(b) + \\ \quad + \psi_i(y_1(b), \dots, y_{i-1}(b), 0, y_{i+1}(b), \dots, y_n(b)), \end{array} \right. \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Essendo \mathfrak{N} l'insieme di applicazioni considerato nel numero 2, per ogni $(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{N}$ sia (y_1, \dots, y_n) l'applicazione definita per mezzo delle equazioni (17) e delle condizioni ai limiti

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i'(a) = \Phi_i(u_1(a), \dots, u_n(a)) y_i(a) + \\ \quad + \varphi_i(u_1(a), \dots, u_{i-1}(a), 0, u_{i+1}(a), \dots, u_n(a)) \\ y_i'(b) = \Psi_i(u_1(b), \dots, u_n(b)) y_i(b) + \\ \quad + \psi_i(u_1(b), \dots, u_{i-1}(b), 0, u_{i+1}(b), \dots, u_n(b)). \end{array} \right. \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

L'insieme \mathfrak{N} e l'operatore che viene definito soddisfano, come può constatarsi senza difficoltà, tutte le condizioni richieste dal teorema di Schauder.

Vale dunque il

TEOREMA 2. — *Se le condizioni I')—V') sono verificate, il sistema (10) ammette almeno una soluzione soddisfacente le condizioni ai limiti (22).*

5. Per evitare le complicazioni di scrittura, non abbiamo considerato il caso più generale dei sistemi della forma

$$(26) \quad y_i'' = f_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

benchè il metodo utilizzato nel caso dei sistemi della forma (10) conduca a risultati completamente analoghi a quelli che vengono ottenuti.

Limitiamoci di nuovo al caso di una sola equazione

$$(27) \quad y'' = f(x, y, y'),$$

con le condizioni ai limiti (2).

Vale il seguente

TEOREMA 3. — *Supponiamo che la funzione $f(x, y, z)$ è continua nell'insieme*

$$(\bar{\Delta}) \quad a \leq x \leq b, \quad |y| \leq H, \quad |z| \leq H',$$

ed ivi derivabile rispetto alle variabili y e z . Di più, siano $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ continue in $\bar{\Delta}$ e sia $\frac{\partial f}{\partial y} \geq m > 0$.

Allora, l'equazione (27) con le condizioni ai limiti (2), ammette una ed una sola soluzione $y(x)$, a condizione che si abbia

$$(28) \quad \|f(x, 0, 0)\| \leq \min \left\{ mH, \frac{\lambda}{H'} \right\},$$

essendo λ un numero positivo determinato dall'equazione.

La dimostrazione del teorema 3 esige la generalizzazione del lemma I al caso delle equazioni lineari della forma

$$y'' = p(x)y + q(x)y' + r(x).$$

Deve ancora rilevarsi il fatto che $y'(x)$ dipende con continuità dalle funzioni $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$. Non crediamo opportuno insistere di più, perchè tutti questi fatti si deducono facilmente con l'aiuto delle formule di miglioramento del tipo (4), per la soluzione $y(x)$ e per la sua derivata $y'(x)$.

Seminario Matematico « A. Myller », Università di Jassy.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. CONTI. *Problemi ai limiti generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. B.U.M.I., Serie III, Anno VIII, 1953.
- [2] G. STAMPACCHIA. *Sopra una generalizzazione dei problemi ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. *Ricerche di Matematica*, Vol. III, 1954.
- [3] M. PICONE. *Appunti di Analisi Superiore*, 1940.

VARIAZIONE DELLA CONCENTRAZIONE DEGLI ACIDI
ASCORBICO E DEIDROASCORBICO
DURANTE LA GERMINAZIONE DEI SEMI DI *Phaseolus vulgaris*

Nota del socio Antonietta Orrù
e dei dott. Franco Badolato e Angela Quagliariello ¹⁾

(Pervenuta all'Accademia il dì 30 settembre 1958)

Sunto. — E' stato seguito l'andamento dei valori dell'acido ascorbico nelle forme ridotta e ossidata durante la germinazione dei semi di *Phaseolus vulgaris*, e la sua ripartizione tra cotiledoni e complesso radichetta-piumetta. I risultati vengono paragonati criticamente con quelli discordanti ottenuti da altri autori su altri semi di leguminose.

L'acido ascorbico, per la sua proprietà caratteristica di ossidarsi e ridursi reversibilmente, e per la sua distribuzione quasi universale nei tessuti vegetali, ha fatto pensare che debba presiedere ad alcune funzioni essenziali del metabolismo cellulare.

Già dal 1928 [1] si era andata accumulando evidenza che l'acido ascorbico e l'acido deidroascorbico presenti nei tessuti vegetali fossero interconvertibili, e nel 1931, SZENT GYÖRGYI dimostrò la presenza dell'ascorbicossidasi capace di catalizzare un'azione diretta tra acido ascorbico (AH) e O₂ per formare acido deidroascorbico (AD), che valse a spiegare la ragione per cui la lesione dei tessuti in presenza di ossigeno provoca rapidamente l'ossidazione del primo [2].

Oggi sono noti diversi enzimi, largamente distribuiti nei vegetali, capaci di catalizzare direttamente o indirettamente la reazione $AH \rightarrow AD$ (acidoascorbicossidasi, polifenolossidasi, citocromossidasi, laccasi etc.), ma per qualcuno di essi è poco nota l'estensione della loro attività in vivo [3]; sembra altresì certo che nei tessuti vegetali siano presenti anche sistemi riducenti che tendono a conservare l'acido ascorbico nella sua forma ridotta [3].

Poichè, salvo eccezioni (nei succhi di frutta ad esempio [4]), la concentrazione dell'AD è generalmente molto piccola, si deve ritenere che i sistemi enzimatici riducenti siano molto più attivi in vivo di quelli ossi-

¹⁾ Lavoro eseguito con il contributo del C. N. R. nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Napoli.

danti, che essi si trovino in equilibrio tale per cui di norma la maggior parte dell'acido ascorbico è presente nella forma ridotta [3], e che questo equilibrio venga rotto per danni meccanici, per azione di sostanze funzionanti da veleni o inibitori enzimatici, ecc. per cui in tale caso si osserva una rapida conversione di AH in AD.

L'insieme delle numerose esperienze istituite allo scopo di studiare le variazioni reciproche di AH e AD nei più diversi tessuti vegetali e nelle condizioni più disparate, ha fatto pensare che il sistema $AH \rightleftharpoons AD$ possa agire in vivo come un trasportatore respiratorio inserendosi nei sistemi fin qui noti [5], [6].

L'AD fungerebbe quindi come accettore di idrogeno, e, secondo THOMAS, [7], la sua concentrazione, piuttosto che quella dell'AH, dovrebbe determinare il livello a cui l'acido ascorbico agisce come catalizzatore respiratorio.

Accanto a tale funzione di catalizzatore respiratorio sono state poi attribuite all'acido ascorbico altre funzioni, quale quella di fattore di accrescimento (derivante dalla osservazione che le più elevate concentrazioni si hanno nelle regioni più attivamente crescenti), o quella di fattore attivante o inibente l'attività enzimatica.

Queste brevi considerazioni valgono a mettere in evidenza l'importanza che riveste lo studio delle variazioni delle concentrazioni di acido ascorbico nelle due forme ossidata e ridotta nei semi germinanti.

E' noto che nei semi di cereali e di leguminose allo stato di quiescenza, esso si trova in quantità quasi trascurabili, ma fin dal 1933 HARRIS e RAY [8] osservarono che col procedere della germinazione esso compare in concomitanza col manifestarsi delle proprietà antiscorbutiche. Essi ne determinarono, dal suo potere riducente, l'accumulo in giorni consecutivi all'inizio della germinazione, e poterono osservare che la sua sintesi avviene anche in assenza completa di clorofilla, cioè nei semi germinanti all'oscurità.

Successivamente, LEE [9], determinando il tenore di AH nei semi di *Pisum sativum* germinanti, osservò che la concentrazione raggiunge un massimo nell'8° giorno di germinazione, che la sintesi sembra avvenire nei cotiledoni, i quali ne contengono quantità elevate fino al 6° giorno, ma successivamente passa in gran parte nella plantula.

LEE e READ [10] sperimentando su semi di soja osservarono che nei cotiledoni, il tasso massimo di AH si raggiunge nel 5° giorno di germinazione, mentre le plantule ne contengono un'elevata percentuale fino al 3° giorno, poi si ha una diminuizione.

POVOLOCKAJA [11], seguendo le variazioni dell'AH nei semi di *Pisum sativum*, nel 1°, 3°, 5°, 9°, 12° giorno di germinazione, ne osservò l'aumento di concentrazione e affermò che la sintesi avviene nei cotiledoni anche se sono stati privati dell'embrione e che tale capacità di sintesi

viene perduta se i semi perdono interamente o parzialmente il loro potere germinante. Essa riferì che in semi privati di embrioni prima dell'incubazione, l'acido ascorbico si trova in quantità di 97,2 mgr per 100 gr di semi secchi, mentre nei semi messi a germinare integri, il contenuto in AH è di mgr 40,6 per 100 gr di semi secchi.

METZER [12] osservò che nei semi di lenticchie da lui utilizzati dopo 24 h di imbibizione non era ancora presente l'acido ascorbico, la cui sintesi avrebbe inizio con la germinazione. Nella plantula, la sua concentrazione si elevava rapidamente, raggiungendo un valore massimo; diminuiva poi per qualche giorno tornando infine ad aumentare. Le variazioni di concentrazione erano più elevate nei cotiledoni ed a basse temperature (4° C.) che alle temperature più elevate (14° - 21° C.): secondo l'A. ciò sarebbe attribuibile alla maggiore utilizzazione dell'AH da parte della plantula alle temperature di 14° - 21° C. Egli confermò che l'AH viene sintetizzato anche dai cotiledoni privati dell'embrione prima dell'incubazione, e trovò mgr 12,5₁₀ di acido ascorbico nei semi interi e mgr 14 % nei cotiledoni privi di embrioni. Tale differenza è stata spiegata con l'utilizzazione da parte dell'embrione di una certa quantità di AH.

Le ricerche più complete sono state eseguite da BRAILSFORD ROBERTSON [13] sui semi di pisello: egli studiò l'effetto della presenza dell'embrione sui processi che hanno luogo nei cotiledoni e poté notare: a) che i semi di pisello in cui l'embrione è stato rimosso possono produrre acido ascorbico (confermando ancora le affermazioni della POVOLOCKAJA); b) che in alcune condizioni le concentrazioni di acido ascorbico sono più elevate nei cotiledoni privi di embrioni messi ad incubare, che nei piselli intatti; c) che la sintesi dell'acido ascorbico avviene nei cotiledoni, qualunque sia il loro grado di suddivisione, purchè la grandezza delle particelle sia superiore alla grandezza delle cellule cotiledonari per cui sembra essere necessaria la presenza di cellule intatte; d) che la luce non è necessaria per la sintesi dell'acido ascorbico nei cotiledoni, mentre sembra necessaria prima che la sintesi avvenga nelle foglie; e) che le variazioni nella concentrazione di acido ascorbico totale non sembrano essere completamente attribuibili a variazioni nella concentrazione dell'ascorbosidasi.

Secondo l'A., la produzione nel pisello intatto di concentrazioni di acido ascorbico troppo elevate per l'optimum di crescita della plantula, possono essere impedita da un fattore limitante entro il pisello intatto.

E' da rilevare che, contrariamente agli AA. precedentemente citati, il ROBERTSON eseguì determinazioni di AH e di AD; ma in contrasto con quanto generalmente noto, e più sopra indicato, i valori dell'AH da lui ottenuti sono sempre inferiori a quelli dell'AD.

Questi i dati bibliografici che ci è stato possibile reperire su un argomento tanto interessante. Naturalmente, non citiamo i numerosi lavori

che sono valsi a identificare i precursori dell'acido ascorbico presenti nei semi ed i rapporti tra sintesi di acido ascorbico nelle piante e metabolismo glucidico.

Come è possibile rilevare, il problema dei rapporti tra sintesi di acido ascorbico e processi di germinazione è incompletamente trattato. Spesso è stata omessa la determinazione della forma ossidata e quando ciò è stato fatto [13] il rapporto AD/AH appare invertito nei confronti di quanto generalmente osservato. Queste considerazioni ci hanno indotti a riprendere in esame la questione per chiarire, al lume di appropriate esperienze, alcuni punti importanti e tuttavia poco considerati.

Pertanto, in questa prima nota riferiamo le indagini eseguite per determinare le variazioni di concentrazione di acido ascorbico, nelle forme ridotta (AH) e ossidata (AD), durante la germinazione dei semi di *Phaseolus vulgaris* e la sua ripartizione nelle varie parti di essi.

Parte sperimentale.

Le esperienze furono eseguite su semi di *Phaseolus vulgaris*, varietà «cannellini», vecchi di nove mesi, la cui germinabilità è risultata pari all'83 %.

Le determinazioni dell'acido ascorbico furono effettuate col metodo di TILLMANS, applicando particolari accorgimenti nel preparare gli estratti dal materiale in esame.

(A questo proposito si deve rilevare che, per quanto altri metodi siano stati indicati per la determinazione dell'acido ascorbico, la decolorazione del 2,6-diclorofenoloindofenolo o di altre sostanze di natura fenolica è ancora la tecnica più comunemente usata e che, se eseguita in ambiente acido, entro uno specifico e limitato periodo di tempo, dà ottimi risultati [14], evitando le interferenze da parte di altri riducenti [15]).

Il materiale veniva rapidamente triturato in mortaio con sabbia di quarzo molto fine (il controllo al microscopio ha messo in evidenza che in tali condizioni circa l'80-90% delle cellule vengono rotte) ed in presenza di una quantità di acido tricloroacetico al 5% in ragione di 4 ml. per gr. di sostanza in esame. La rapidità della operazione è indispensabile per evitare l'ossidazione dell'acido ascorbico e l'alta concentrazione dell'acido tricloroacetico crea l'ambiente necessario per rendere la reazione specifica e per inattivare gli enzimi ossidanti.

La poltiglia così ottenuta veniva centrifugata per 20' e, dopo aver allontanato il supernatante, l'operazione si ripeteva sul residuo per altre due volte, lavando sempre con 10 ml. di acido tricloroacetico al 5% (si era così certi di estrarre tutto l'acido ascorbico presente nelle due forme). I liquidi di decantazione venivano riuniti e diluiti 1:1 con acqua

distillata, per raggiungere una concentrazione di acido tricloroacetico del 2,5 % alla quale corrisponde l'acidità desiderata (pH 3).

Su un' aliquota di tale estratto si eseguiva la titolazione con una soluzione a pH 7 di 2,6-diclorofenoloindofenolo fino al raggiungimento di una colorazione debolmente rosa osservabile su fondo bianco, che scompariva soltanto dopo 30 secondi.

La determinazione veniva ripetuta su un'altra aliquota dell'estratto, dopo avervi fatto gorgogliare H_2S per 15', averla mantenuta in contatto con esso per 2 h, ed averne allontanato l'eccesso mediante una corrente di CO_2 a temperatura ambiente, fino alla scomparsa della reazione con l'acetato di piombo.

Con tale metodo abbiamo potuto ottenere i valori dell'acido ascorbico totale (AT) presente nell'estratto e di quello che si trova nella forma ridotta (AH). La forma ossidata (AD) si ricava per differenza (AT-AH).

Le determinazioni dell'acido ascorbico nella forma ridotta (AH) ed ossidata (AD) furono eseguite:

A) *Sui semi in toto*, dopo 24 h di imbibizione iniziale e poi, periodicamente, durante la germinazione fino a 192 h. Un determinato numero di semi di eguali dimensioni, veniva pesato, si lavava con $HgCl_2$ al 2 ‰, si sciacquava abbondantemente con acqua distillata e quindi veniva posto ad imbibire in acqua distillata per 24 h ($t = 30^\circ C.$). Su un' aliquota nota si effettuava l'estrazione e la determinazione dell'acido ascorbico (dopo aver sempre allontanato il tegumento seminale). I restanti semi si trasferivano in appositi germinatoi di terracotta in camera termostatica a $30^\circ C.$ e 80 % di umidità.

Ad intervalli regolari di tempo, dai germinatoi si prelevavano aliquote di semi germoglianti che venivano pesate e dalle quali (dopo aver allontanato il tegumento seminale) si preparavano gli estratti secondo il metodo sopradescritto, per la determinazione dell'AH e dell'AD.

Gli stadi di germinazione presi in considerazione, si riferiscono solamente alle prime fasi di sviluppo della plantula.

Si riportano le descrizioni dello stato dei semi relativo alle diverse ore di germinazione prese in considerazione (a partire dalle 24 h di imbibizione):

1) *dopo 24 h*: radichetta primaria ben sviluppata, lunga 10-12 mm; tegumento seminale appena lacerato in corrispondenza del punto dal quale essa è fuoriuscita;

2) *dopo 48 h*: la radice primaria si accresce raggiungendo i 20-22 mm, mentre nella sua parte prossimale, appare in forma di piccoli bottoncini allungati, qualche radichetta secondaria. La fenditura del tegumento seminale è più accentuata e già compare l'ipocotile al di fuori del seme;

3) *dopo 72 h*: continua l'allungamento della radice primaria (50-55 mm) e delle radichette secondarie (5-10 mm) situate nella porzione superiore. Gli abbozzi di altre radichette secondarie si rendono poi evidenti anche nella porzione distale della radice primaria. L'asse ipocotile si allunga (7-8 mm) mentre si produce un'ulteriore più profonda lacerazione del tegumento;

4) *dopo 96 h*: la radice primaria misura una lunghezza media di 65-70 mm, e le secondarie, più vicine all'ipocotile, di 25-30 mm. Bene evidenti (3-4 mm) sono anche le prime radici secondarie formatesi nel tratto distale della principale. L'asse ipocotile, che comincia ad assumere un decorso tortuoso, misura 10-12 mm;

5) *dopo 120 h*: la radice primaria, le secondarie prossimali e distali e l'asse ipocotile aumentano il loro accrescimento in rapporto allo stadio precedente;

6) *dopo 144 h*: l'intero apparato radicale si presenta notevolmente più sviluppato nei confronti dello stadio precedente e, se pur giovane, già si manifesta col caratteristico aspetto fittonante che assumerà da adulto. Le misurazioni eseguite hanno dato le seguenti lunghezze massime: radice primaria mm 75, radici secondarie prossimali mm 40, radici secondarie distali mm 10. E' da notare che nelle radici secondarie compaiono i primi abbozzi delle radici terziarie. L'ipocotile raggiunge i 15-20 mm di lunghezza;

7) *dopo 168 h*: ulteriore allungamento delle radici di ogni ordine (primaria: oltre i 100 mm; secondaria: 60-65 mm) ivi comprese le terziarie, le quali, in questo stadio diventano particolarmente evidenti. L'asse ipocotile risulta molto ingrossato e allungato (30-40 mm) mentre inizia il divaricamento cotiledonare e la conseguente eliminazione del tegumento seminale, il quale risulta dilacerato in più punti, secondo le linee irraggianti dall'originario punto di fuoriuscita della radice primaria;

8) *dopo 192 h*: durante tale stadio è attuata l'espulsione del tegumento seminale e il raddrizzamento dell'ipocotile, e si ha il completo divaricamento dei cotiledoni lievemente inverditi. L'ipocotile si allunga, mentre le foglie primordiali sono in via di espansione e sono ancora involucri gli abbozzi delle successive foglioline.

B) *Sui soli cotiledoni*, ottenuti allontanando, al momento della determinazione il complesso radichetta-piumetta: a) dai semi interi di partenza (mediante un piccolo bisturi), e b) dai semi germinanti, (il tegumento seminale veniva in ogni caso asportato).

Il prelevamento delle aliquote, corrispondenti ad un certo numero di semi, è stato effettuato dopo 24 h di imbibizione e, successivamente, ad intervalli regolari di tempo (negli 8 stadi già indicati), fino a 192 h di

TABELLA I.

Contenuto di acido ascorbico nei semi di *Phaseolus* durante la germinazione

(mg presenti nel materiale proveniente da 100 g di semi allo stato naturale di umidità)

Dopo incubazione in germinatoi a 30° C											
Dopo 24 h di imbibizione		24 h	48 h	72 h	96 h	120 h	144 h	168 h	192 h		
a) Semi in toto	AT	11,03	16,62	22,27	31,06	35,70	61,65	45,50	47,10	62,59	
	AH	7,51	14,14	14,35	24,01	30,60	44,84	38,94	33,53	54,12	
	AD	3,52	2,48	7,92	7,05	5,10	16,81	6,56	13,57	8,47	
	AD/AH	0,46	0,17	0,55	0,29	0,16	0,37	0,17	0,44	0,15	
b) Soli cotiledoni	AT	10,75	21,14	32,02	33,31	53,40	56,17	56,95	47,46	54,88	
	AH	9,37	14,70	24,74	8,13	51,60	43,69	37,76	36,54	41,03	
	AD	1,38	6,44	7,28	5,18	1,80	12,48	19,19	10,92	13,85	
	AD/AH	0,14	0,43	0,29	0,18	0,03	0,28	0,50	0,29	0,33	
c) Soli complessi radichetta-piumetta	AT	0,74	2,36	4,00	6,21	15,32	14,32	25,23	38,47	44,02	
	AH	0,57	1,54	2,72	5,38	8,87	9,27	17,42	19,88	27,09	
	AD	0,17	0,82	1,28	0,83	6,45	5,05	7,81	18,59	16,93	
	AD/AH	0,29	0,53	0,47	0,15	0,72	0,54	0,44	0,92	0,62	

NOTA — Ogni valore è sempre la media di almeno tre determinazioni.

AT = Ac. ascorbico totale; AH = ac. ascorbico nella forma ridotta; AD = ac. deidroascorbico.

incubazione nei germinatoi seguendo, per le determinazioni, lo stesso schema procedurale riferito in *A*.

C) *Sui complessi radichetta-piumetta*, separati dai cotiledoni utilizzati in *B*, al momento della determinazione.

I valori ottenuti dalle serie di cui in *A*, *B*, *C*, sono riportati nella tabella I e sui grafici n. 1, 2, 3, 4 e 5. Essi sono sempre espressi in mgr e riferiti alla quantità di materiale (semi in toto, o soli cotiledoni, o solo complesso radichetta-piumetta) appartenente a 100 gr di semi di partenza nello stato naturale di umidità.

I dati riportati risultano sempre dalla media di almeno tre determinazioni.

D) A completare questo gruppo di esperienze si eseguirono determinazioni sull'acido ascorbico presente nei cotiledoni e negli embrioni (derivanti da 100 gr di semi nelle condizioni naturali di umidità) quando per 24 h venivano messi ad imbibire insieme, (in tal caso si separavano solo al momento della determinazione) e separatamente.

I valori così ottenuti sono riportati nella tabella II e sono la media di almeno tre determinazioni.

TABELLA II.

Messi ad imbibire insieme			Messi ad imbibire separatamente	
	Cotiledoni mg	Complesso radichetta-piumetta mg	Cotiledoni mg	Complesso radichetta-piumetta mg
AT	10,75	0,74	14,70	0,94
AH	9,37	0,57	11,30	0,68
AD	1,38	0,17	3,40	0,26

Conclusioni.

I risultati delle esperienze su riportate permettono di trarre le seguenti conclusioni:

a) nei semi di *Phaseolus*, durante la germinazione, prevale sempre l'acido ascorbico nella forma ridotta per cui il rapporto AD/AH è sempre inferiore all'unità. Ciò contrasta con i risultati ottenuti sui piselli da BRAILSFORD ROBERTSON [13].

b) *nei semi in toto* si osserva un aumento di AH durante le prime fasi della germinazione con un massimo dopo 120 h; segue una lieve diminuzione dopo cui si manifesta un nuovo aumento (192 h). Le variazioni sono molto più limitate per l'AD che presenta anch'esso un massimo dopo 120 h di germinazione con tendenza alla diminuzione al termine dell'esperienza (gr. 1, tab. I).

I valori del rapporto AD/AH durante le 192 h, presentano delle oscil-

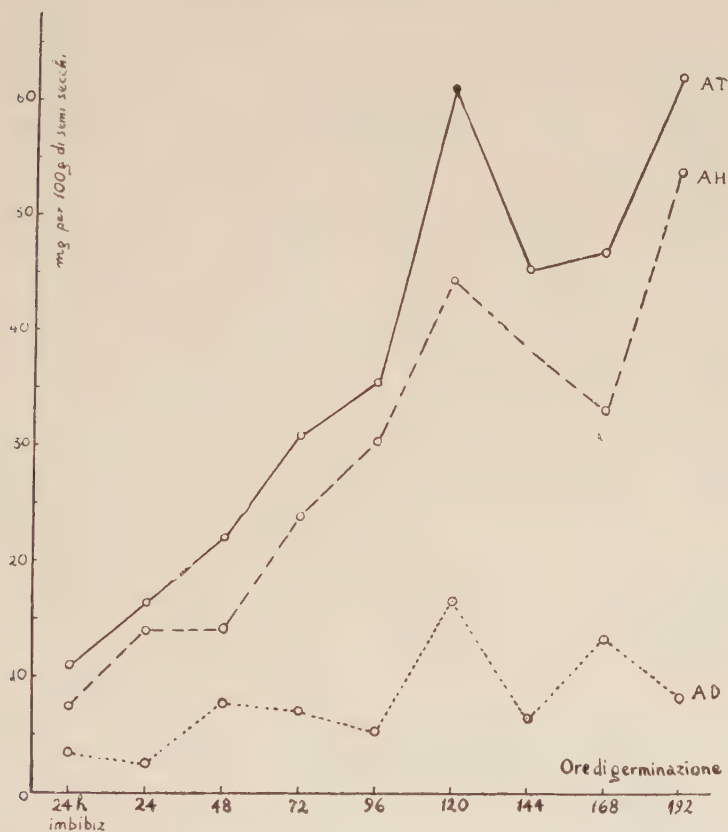


GRAFICO 1. — Variazioni del contenuto in AT, AH, e AD dei semi in toto col progredire della germinazione.

lazioni limitate che vanno da un minimo di 0,17 ad un massimo di 0,55 (gr. 5, tab. I),

c) *nei cotiledoni* separati dai semi germoglianti al momento della determinazione, i valori di AH, riferiti a 100 gr di *Phaseolus vulgaris* nelle condizioni naturali di umidità, mostrano un sensibile aumento durante l'inizio della germinazione con un massimo a 96 h, a cui fa seguito una diminuzione ed un successivo aumento dopo 192 h. L'AD appare

relativamente meno variabile durante la germinazione con un massimo alle 144 h ed un minimo alle 96 h, ma con tendenza generale all'aumento (graf. 2, tab. I).

Il rapporto AD/AH presenta anche in questo caso, una variabilità non molto notevole con un minimo di 0,03 (a 96 h), ed un massimo di 0,50 (a 144 h) (graf. 5, tab. I).

d) *Nei soli complessi radichetta-piumetta*, separati dai semi ger-

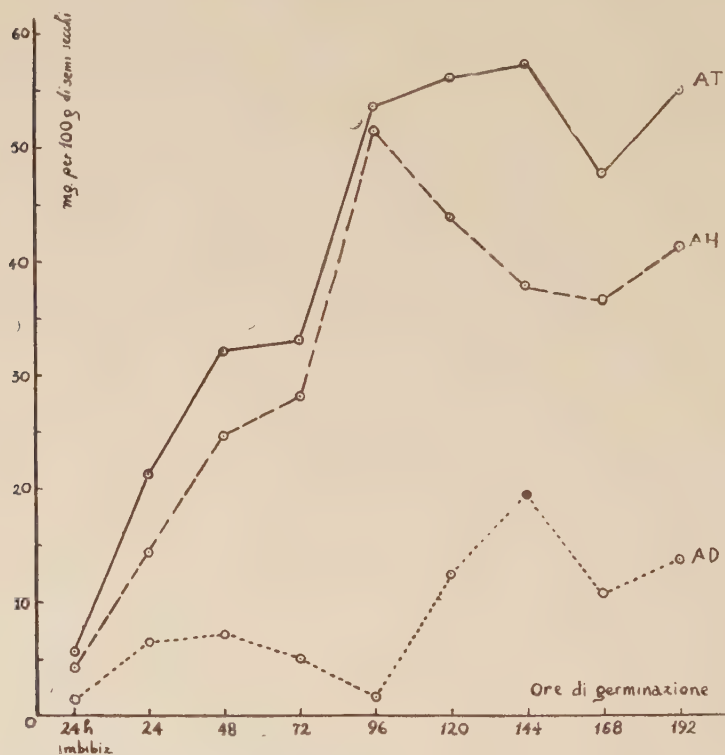


GRAFICO 2. — Variazioni del contenuto in AT, AH e AD nei soli cotiledoni col progredire della germinazione.

moglianti al momento della determinazione e derivanti da 100 gr. di semi nelle condizioni naturali di umidità, si osserva nettamente un costante aumento dei valori di AH e di AD, durante il processo di germinazione. In questo caso i valori di AH superano sempre quelli di AD ma non differiscono molto da essi (graf. 3, tab. I).

In conseguenza i valori del rapporto AD/AH sono in genere più elevati di quelli osservati in *b*) e in *c*) e tendono ad aumentare col procedere della germinazione (graf. 5, tab. I).

E' questo un indice della maggiore utilizzazione dell'acido ascorbico durante lo sviluppo da parte della plantula.

e) E' possibile mettere in evidenza che i valori dell'acido ascorbico totale dei soli cotiledoni provenienti da 100 gr di semi nelle condizioni naturali di umidità, sono *quasi sempre* superiori a quelli osservati in 100 gr di semi in toto in varie fasi della germinazione (graf. 4, tab. I), confermando quanto osservato da altri AA. [11-12-13].

La somma dei valori dell'AT determinato sui cotiledoni e di quelli dell'AT determinato separatamente sul complesso radichetta-piumetta, cor-

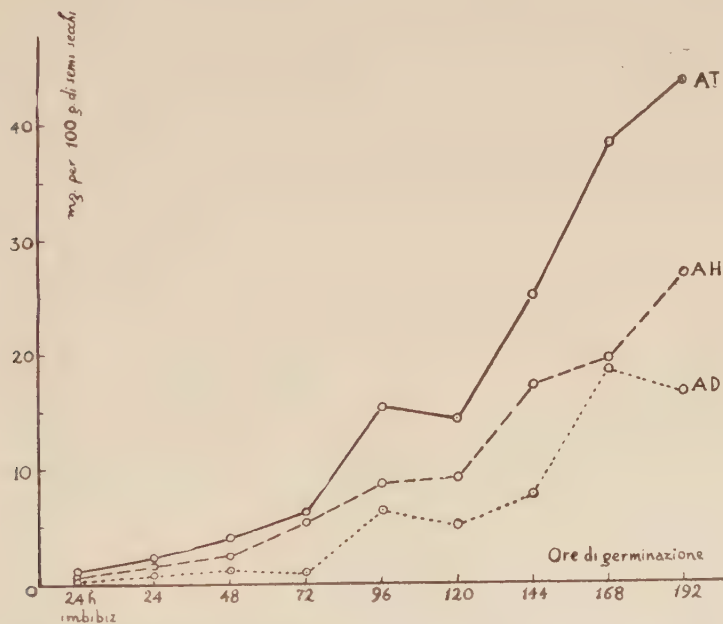


GRAFICO 3. — Variazioni del contenuto in AT, AH ed AD nel solo complesso radichetta-piumetta col progredire della germinazione.

rispondenti nei due casi a 100 gr di semi iniziali e negli stessi stadi di germinazione, è *sempre* notevolmente superiore ai valori dell'AT determinato su quantità corrispondenti di *semi in toto* (graf. 4).

Date le condizioni sperimentali da noi adottate non sembra che ciò possa attribuirsi soltanto ad una maggiore utilizzazione dell'acido ascorbico da parte della pianta, come spiegato da ROBERTSON [13] e da METZER [12], poichè, mentre nelle loro esperienze i cotiledoni venivano posti ad incubare già privi di embrione, nel nostro caso si mettevano a germogliare i semi interi e la determinazione si eseguiva sui cotiledoni, o sul complesso radichetta-piumetta separati solo al momento della determinazione.

Il ROBERTSON accenna inoltre ad un fattore entro il seme di pisello integro, limitante una produzione eccessiva di acido ascorbico che potrebbe danneggiare l'optimum di crescita della pianta.

Le nostre esperienze non sembrano confermare una tale ipotesi: se un fattore limitante esiste non sembra agire sulla produzione dell'acido ascorbico nel cotiledone.

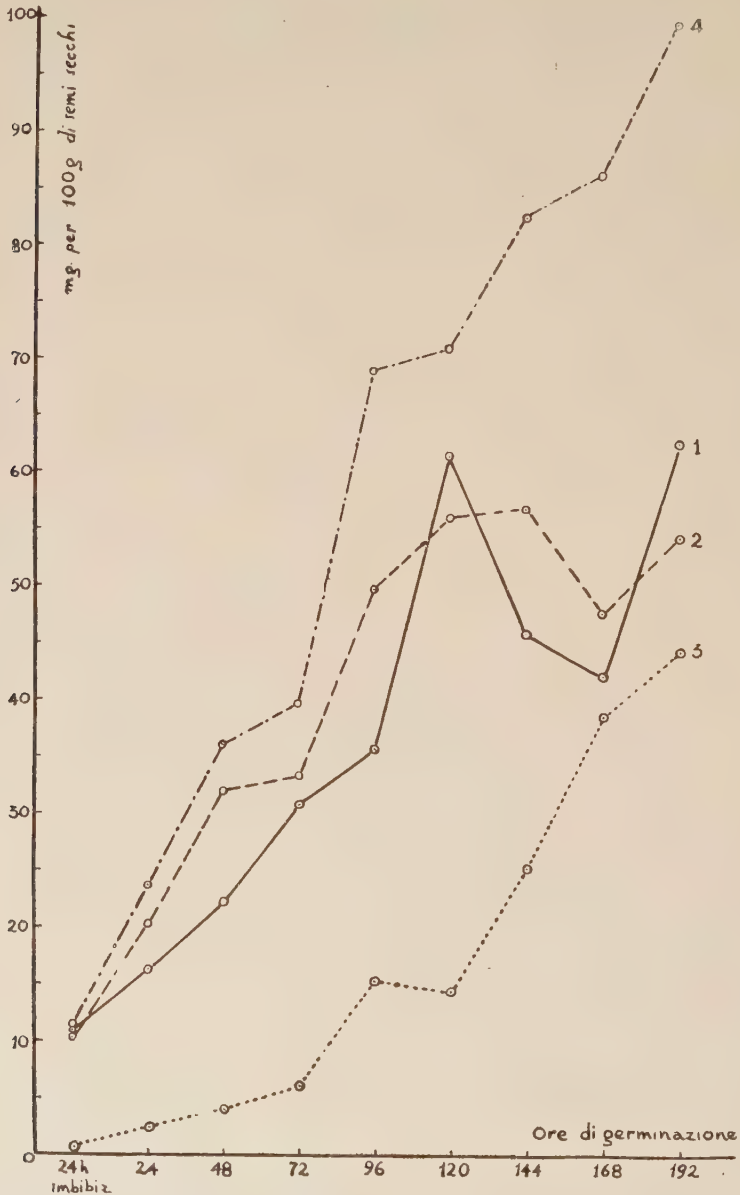


GRAFICO 4. — Variazioni dei valori di AT durante la germinazione:

- 1 — nei semi in toto
- 2 — nei soli cotiledoni
- 3 — nel solo complesso radichetta-piumetta
- 4 — valori 2+3

f) L'aumento dell'acido ascorbico comincia ad osservarsi dopo 24 h di imbibizione (contrariamente a quanto osservato da METZER [12] sulle lenticchie).

I valori riferiti nella tab. II indicano che la quantità presente nei co-

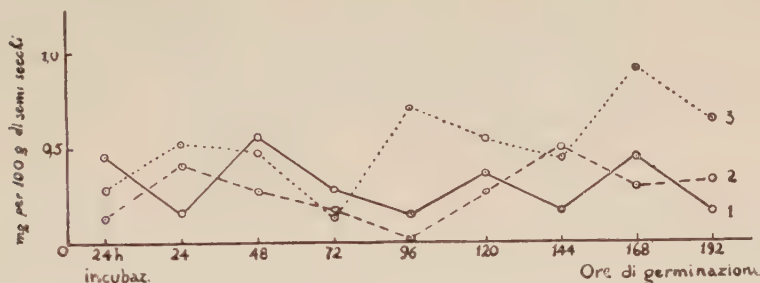


GRAFICO 5. — Variazioni del rapporto AD/AH col progredire della germinazione:

- 1 — sui semi in toto
- 2 — sui soli cotiledoni
- 3 — sul solo complesso radichetta-piumetta

tilodoni e nel complesso radichetta-piumetta è maggiore quando questi vengono imbibiti separatamente.

g) Si conferma che l'acido ascorbico si può sintetizzare nei cotiledoni anche se imbibiti separatamente dagli embrioni.

Nuove ricerche sono state istituite per chiarire i risultati su riferiti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SZENT GYÖRGYI A. *Biochem. J.*, **22**, 1387 (1928).
- [2] SZENT GYÖRGYI A. *J. Biol. Chem.*, **90**, 385 (1931).
- [3] MAPSON L. W. *Vitamins and Hormones*, **11**, 1 (1953).
- [4] BOGDANSKY C. *Année biologique*, **33**, 427 (1957).
- [5] MAPSON L. W. e MOUSTAFA E. M. *Biochem. J.*, **62**, 248 (1956).
- [6] KERSTEN H., KERSTEN W., STAUDINGER H. *Biochem. Z.*, **328**, 24 (1956).
- [7] THOMAS M. *Plant Physiology*, London, 1947.
- [8] HARRIS L. J. e RAY S. N. *Biochem. J.*, **27**, 580 (1933).
- [9] LEE R. S. *J. of Chin. Chem. Soc.*, **4**, 219 (1936).
- [10] LEE R. S. e READ J. T. *J. of Chin. Chem. Soc.*, **4**, 208 (1936).
- [11] POVOLOCKAJA K. L. *C. R. Ac. Sci. U.R.S.S.*, **18**, 1 (1937).
- [12] METZER J. *Bull. Soc. Chim. Biol.*, **22**, 445 (1940).
- [13] BRAILSFORD ROBERTSON T. S. *Aust. J. of Exper. Biol. and Med. Sci.*, **25**, 41 (1947).
- [14] HARRIS L. J. e RAY S. N. *Biochem. J.*, **27**, 303 (1933).
- [15] HARRIS L. J., MAPSON L. W., KODICEK E., MOORE T., BOOTH V. H. *Proc. XI Int Congr. Chem.*, Abst. N. 11 (1948).

LE ATTIVITÀ α - E β -AMILOLITICHE DEI SEMI DI *Canavalia ensiformis*

Nota dei dott. Teodoro De Leo e Lidia Foti
presentata dal socio Antonietta Orrù ¹⁾

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. — Sono state determinate le attività della α -amilasi e della β -amilasi nei semi di *Canavalia ensiformis*, mettendole in rapporto ai vari stadi di germinazione e al grado di imbibizione raggiunti dalla plantula.

È noto che nei processi che avvengono durante la germinazione dei semi il materiale di riserva in essi contenuto viene, ad opera di particolari enzimi, reso solubile ed utilizzabile da parte della plantula [1]. Uno dei composti di riserva dei semi di cereali e di leguminose è l'amido che nel processo di germinazione subisce l'azione idrolitica delle amilasi. Esso si trova nei semi, organizzato in caratteristici granuli microscopici, anisotropi, di varia grandezza e forma [2] [3] che risultano formati essenzialmente dall'amilosio, polimero lineare del glucosio, dall'amilopectina, polimero ramificato del glucosio [4], da piccole quantità di acido fosforico esterificato con gli ossidrili alcoolici dei poliosi, e da acidi grassi.

In vitro i granuli di amido intatti vengono solo molto lentamente idrolizzati dalle due amilasi. Ciò, secondo alcuni AA., sarebbe dovuto ad uno strato esterno di sostanze estranee protidiche, lipidiche o cellulosiche, inattaccabili dalle amilasi, o secondo vedute più recenti che negano la esistenza di tale strato, alle parti più esterne del granulo più dense e più disidratate rispetto a quelle più interne [5] [6]. La scissione, durante la germinazione, dei granuli di amido ad opera delle amilasi, viene spiegata, per quanto si è detto, in varie maniere. Secondo alcuni AA. [7] [8], in alcuni semi, come ad esempio quelli di orzo, accanto alle due amilasi esiste un terzo enzima « l'amilofosfatasi » che agisce sui granuli di amido distruggendone lo strato esterno e rendendoli, quindi, atti all'azione delle altre due amilasi.

L'amilofosfatasi trasforma, in vitro, l'amido insolubile in amido solubile, ma non effettua nessuna rottura dei legami glucosidici, mentre libe-

¹⁾ Lavoro eseguito col contributo del C.N.R. nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Napoli.

ra radicali fosforici. Secondo altri AA., invece, [9], alcune cariossidi come quelle di frumento, contengono un fattore enzimatico differente dalle note amilasi, che accelera notevolmente l'idrolisi dei granuli di amido.

Con o senza l'ausilio di tali enzimi o fattori enzimatici, le amilasi agiscono sull'amido, durante la germinazione, scindendolo in una serie di prodotti più semplici la cui complessità e struttura dipende dalla natura dell'enzima (α - o β -amilasi) e dalla durata dell'azione enzimatica [10].

Non in tutti i semi, però, si trovano le due amilasi e l'attività amilolitica è diversa da seme a seme.

Nei semi di orzo, frumento, segala ed avena si ritrovano entrambe le amilasi che presentano un comportamento molto simile durante la maturazione e la germinazione del seme.

La β -amilasi aumenta notevolmente durante il primo periodo della maturazione, poi l'attività β -amilolitica diminuisce in quanto parte dell'enzima si trasforma in una forma insolubile ed inattiva, legata ad una proteina insolubile [11]. Durante la germinazione tale forma viene progressivamente attivata e resa solubile dagli enzimi proteolitici del seme che scindono il legame tra la β -amilasi e la proteina; non si avrebbe, quindi, ulteriore formazione di β -amilasi e l'attività β -amilolitica aumenterebbe semplicemente per la trasformazione dell'enzima dalla forma inattiva a quella attiva; infatti, facendo agire sul seme maturo e allo stato di quiescenza un enzima proteolitico, quale la papaina, si ottiene una quantità di β -amilasi che è dello stesso ordine di grandezza di quella che appare durante la germinazione [12] [13] [14]. In definitiva, la β -amilasi appare formarsi solo durante il primo periodo di maturazione del seme.

Anche l' α -amilasi si forma nei semi dei suddetti cereali nel primo stadio di maturazione, ma poi l'attività α -amilolitica del seme diminuisce rapidamente ed allo stato di quiescenza è quasi praticamente annullata; essa riappare, però, durante la germinazione ed aumenta progressivamente.

Non è ancora chiaro se in questo caso si tratti di formazione di nuovo enzima o di liberazione di esso da un complesso inattivo [16] [17] [18] [19] [20].

In altri semi si trova un solo tipo di amilasi. I semi di soia contengono quasi solamente β -amilasi e l'enzima non sembra legato ad alcuna proteina insolubile, mentre l' α -amilasi è presente solo in tracce [21] [22] [23]. Le patate dolci contengono solo β -amilasi e l'assenza o la presenza in tracce di α -amilasi fa sì che esse siano un'ottima fonte per la preparazione della β -amilasi pura.

Altri semi contengono, invece, solo α -amilasi; il più noto fra essi è il sorgo che, allo stato di quiescenza e durante la germinazione, presenta solo attività α -amilolitica [25]; esistono, però, in letteratura, altri esempi meno noti che si riferiscono a semi provenienti, in particolare, da piante di paesi caldi [26].

Nel 1954 uno di noi [27] mise in evidenza, nei semi di *Canavalia ensiformis*, la presenza di attività α amilolitica.

I semi su cui furono eseguite tali ricerche erano stati importati dall'Africa orientale nel 1939, ed avevano perduto la loro capacità germinativa. In tali condizioni fu possibile determinare l'attività enzimativa solo sui semi allo stato naturale di umidità e a vari stadi di imbibizione [28].

Disponendo ora di semi capaci di germinare, importati recentemente dalla Somalia, abbiamo voluto determinare, tenendo presenti le premesse bibliografiche riportate ed i precedenti risultati [27] [28], l'attività amilolitica di essi, sia allo stato di quiescenza e sia durante la germinazione.

Nella presente nota sono riferiti i risultati di tale ricerca.

PARTE SPERIMENTALE

A) *Tecnica di germinazione.*

I semi di *C.e.*, lavati successivamente con acqua, con soluzione di cloruro mercurico all'1^o/100 e poi di nuovo con acqua, vengono lasciati imbibire per 24h in un volume all'incirca doppio di acqua di fonte, in camera calda, alla temperatura di $30^{\circ} \text{C} \pm 1^{\circ}$.

Al termine delle 24h vengono posti in germinatoi di terracotta, sterilizzati al calor secco ed ivi lasciati germinare, in adatte condizioni di umidità e sempre in camera calda, alla temperatura di $30^{\circ} \pm 1^{\circ} \text{C}$.

Gli stadi della germinazione presi in esame concernono soltanto le prime fasi della evoluzione della plantula. Essi, infatti, riguardano tutte le fasi che precedono il divaricamento cotiledonare e la conseguente espulsione del tegumento seminale, cioè quelle fasi in cui si ha allungamento dell'ipocotile e della radice primaria sino alla formazione delle prime radichette terziarie. Nell'intervallo di germinazione considerato scarsissime sono, invece, le modifiche a carico dell'ipocotile, che si allunga di poco e delle foglie primordiali le quali cominciano appena ad espandersi.

Riportiamo le descrizioni relative ai diversi stadi presi in considerazione, stadi peraltro schematizzati nella fig. 1.

I^o stadio : semi allo stato di quiescenza.

II^o stadio : semi lasciati imbibire per 24h.

III^o stadio : dopo due giorni di germinazione. (Radichetta primaria bene sviluppata lunga mm. 10-12. Tegumento seminale appena lacerato in corrispondenza del punto dal quale essa è fuoruscita).

IV^o stadio : dopo tre giorni di germinazione. (La radice primaria si accresce raggiungendo la lunghezza di 15-25 mm., mentre nella sua parte prossimale compaiono, sotto forma di piccoli bottonecini allungati, alcune

radichette secondarie. Si accentua la fenditura del tegumento seminale e si evidenzia al di fuori del seme, l'ipocotile).

V^o stadio: dopo cinque giorni di germinazione. (Continua l'allungamento della radice primaria (mm. 50-55) e delle radichette secondarie (mm. 5-10) situate nel suo tratto superiore. Compaiono gli abbozzi di altre radici

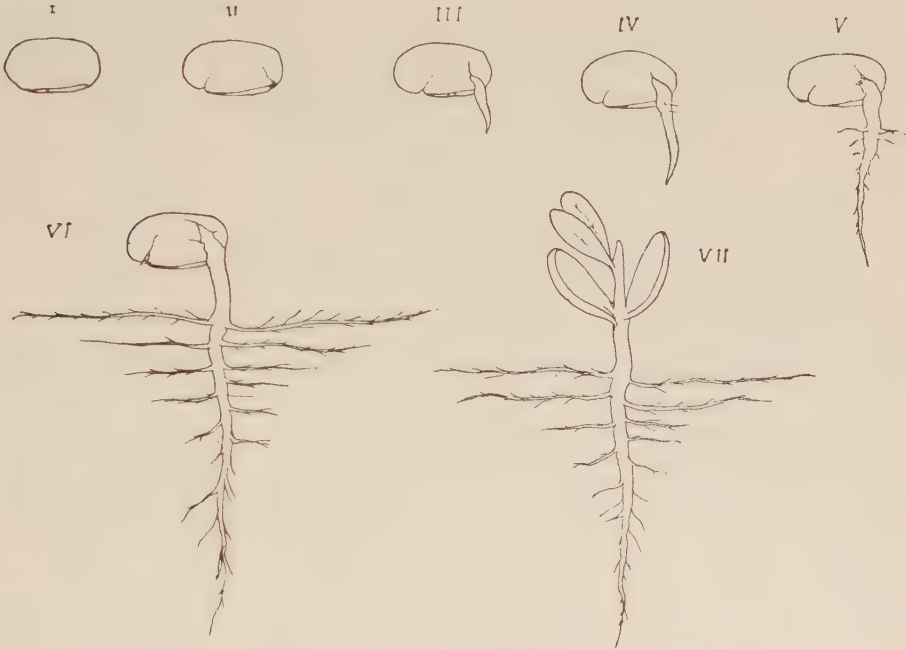


FIG. 1. — Stadi di germinazione presi in considerazione.

secondarie anche nella porzione distale della radice primaria. L'asse ipocotile si allunga (mm. 7-8), mentre si determina una ulteriore e più profonda dilacerazione del tegumento).

VI^o stadio: dopo sei giorni di germinazione. (Continua l'allungamento delle radici primaria e secondarie e si manifestano le terziarie. L'asse ipocotile risulta molto ingrossato ed allungato (mm. 30-40) mentre inizia il divaricamento cotiledonare con conseguente imminenza dell'eliminazione del tegumento seminale, il quale risulta dilacerato in più punti, secondo linee irraggianti dall'originario punto di fuoriuscita della radice primaria).

VII^o stadio: dopo otto giorni di germinazione. (Tale stadio è caratterizzato da: attuata espulsione del tegumento seminale, raddrizzamento dell'ipocotile, completo divaricamento dei cotiledoni, lievemente inverditi, inizio dell'allungamento dell'epicotile, foglie primordiali in via di espansione ed ancora involucrianti gli abbozzi delle successive foglie).

B) Preparazione degli estratti enzimatici.

Gli estratti enzimatici sono stati preparati con le modalità già stabilite da uno di noi (27). I semi, privati del tegumento seminale, venivano ridotti a farina finissima (se allo stato di quiescenza) o in poltiglia (negli stadi successivi di germinazione) e tale materiale veniva estratto per 1h a 37°C con CaCl_2 0,01 M.

La concentrazione degli estratti impiegati nelle ricerche riportate nella presente nota, è la seguente:

1) estratti utilizzati per la misura dell'attività α -amilolitica:

semi allo stato di quiescenza 2,5%

semi imbibiti e germinanti 5,0%.

2) Estratti utilizzati per la misura dell'attività β -amilolitica:

semi allo stato di quiescenza 5%

semi imbibiti e germinanti 10%.

Per i semi imbibiti e germinanti si è utilizzata, quindi, una concentrazione degli estratti circa doppia e ciò per fare in modo che le determinazioni dell'attività enzimatica fossero eseguite su quantità di materiale iniziale presso a poco eguale.

Dei semi, nelle diverse condizioni, veniva sempre determinato il contenuto percentuale di acqua in modo, da poter riferire i risultati allo farina allo stato secco.

C) Misura dell'attività α -amilolitica.

L'attività α -amilolitica dei nostri estratti enzimatici è stata determinata col metodo di SANDSTEDT e coll. (29), e cioè misurando il tempo richiesto (tempo di destrinizzazione T) per convertire uno speciale substrato (amido degradato per 24h da β -amilasi) in prodotti di idrolisi che, con una speciale soluzione di iodio (iodio B = soluzione di KJ_3 0,088%), diano la stessa colorazione data da una soluzione di destrina al 0,528% con un'altra speciale soluzione di iodio (iodio A = soluzione di KJ_3 all'1,65%). Le due soluzioni di iodio a concentrazione diversa, vengono adoperate per evitare di avere tempi di destrinizzazione molto lunghi. La destrina standard ha, infatti, un grado di polimerizzazione piuttosto basso e occorrerebbe un tempo piuttosto notevole per far degradare il substrato amido fino a prodotti di idrolisi dello stesso suo grado di polimerizzazione. L'accorciamento del tempo di destrinizzazione che si ha con questo artificio è notevole: ad esempio, adoperando sia per i prodotti di idrolisi del substrato che per la destrina, la stessa soluzione B di iodio si ha, per lo stesso estratto enzimatico, un tempo di destrinizzazione di 120', anzichè di 19', quale si ottiene nelle condizioni del metodo.

La colorazione del composto iodio A-destrina, appare eguale a quella

del composto iodio B-prodotti di idrolisi non solo in una comparazione visiva, ma anche in comparazione spettrofotometrica. Infatti, le curve spettrofotometriche del primo composto (curve D_1, D_2, D_3 del grafico 1) presentano lo stesso andamento qualitativo e quantitativo della curva ottenuta col secondo composto (curva J_{30^0} del grafico 1), mentre differiscono notevolmente da quella del composto destrina-iodio B (curva D_B del grafico).

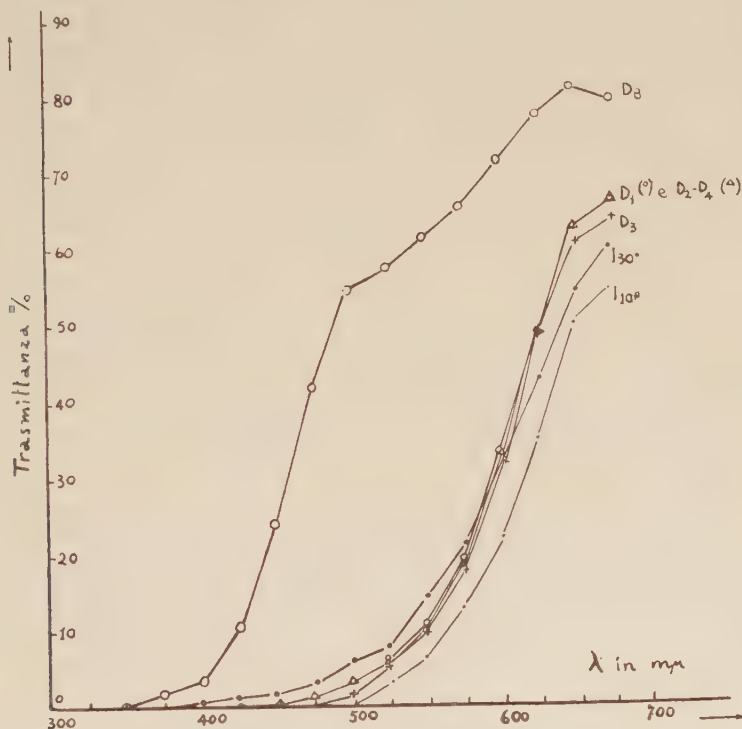


GRAFICO n. 1 — Curve spettrofotometriche dei composti destrina-iodio e prodotti di idrolisi-iodio.

D_B = Destrine standard + Iodio B;

D_1, D_2, D_3, D_4 = Destrine standard + Iodio A;

J_{30^0}, J_{10^0} = Prodotti idrolisi + Iodio B.

Il metodo in questione è stato già da noi adoperato in precedenti lavori [27] [28] [30]; in essi non era, però, richiesta una rigorosa riproducibilità in quanto la comparazione dei risultati veniva fatta nell'ambito di ciascuna serie di misure, eseguite tutte nello stesso giorno e pertanto, nelle medesime condizioni sperimentali. In questo caso, avendo necessità di una perfetta riproducibilità dei valori ottenuti ad intervalli di tempo variabili, abbiamo ritenuto opportuno revisionare il metodo per stabilire le condizioni migliori, tenendo presenti le ricerche eseguite da REDFERN [3.].

Il substrato, su cui è fatta agire l' α -amilasi, è costituito, come si è

detto, da amido degradato per almeno 24h, da un estratto di β -amilasi (esente da α -amilasi), cioè è costituito dalle cosiddette « β -destrine limite ».

SANDSTEDT e coll. [29] trovarono che, facendo agire su tale substrato anzichè sull'amido l' α -amilasi, si ottiene un tempo di destrinizzazione non solo più breve, ma inversamente proporzionale all'attività α -amilolitica. Occorre però assicurarsi che il substrato sia costituito sempre *esclusivamente* da tali « β -destrine limite », vale a dire che l'amido *sia degradato da β -amilasi esente completamente da α -amilasi* e che *la degradazione sia completa*, cioè che la β -amilasi sia in eccesso rispetto all'amido.

Pertanto, al momento della preparazione e periodicamente, abbiamo controllato, nell'estratto di frumento duro che costituisce il nostro estratto di β -amilasi, l'assenza dell' α -amilasi, con il micrometodo di STONE [32], che permette di rilevare anche tracce di tale enzima. Inoltre, abbiamo misurato i tempi di destrinizzazione ottenuti con un unico estratto enzimatico β -amilasico aggiunto, in quantità variabili, ad una stessa quantità di substrato (amido). Tali tempi, al crescere della quantità degli estratti di β -amilasi, dapprima decrescono e poi, raggiunto l'eccesso di β -amilasi, rimangono costanti. In tal modo, si può controllare la quantità di estratto di β -amilasi necessaria per una degradazione completa. (Ciò è indispensabile perchè estratti provenienti da grani duri diversi, presentano una diversa ricchezza in β -amilasi).

Per esprimere correttamente i risultati occorre conoscere, inoltre, la esatta concentrazione del substrato; poichè non è facile la preparazione della soluzione esatta iniziale di amido per pesata, su un'aliquota di questa è preferibile dosare la concentrazione dell'amido: ciò è stato fatto applicando il metodo di HAGEDORN e JENSEN, da uno di noi opportunamente modificato [4].

Per quanto riguarda, infine, la riproducibilità della colorazione del composto destrina standard-iodio A, abbiamo tracciato le curve spettrofotometriche di tale composto, a uguali intervalli di tempo, cioè dopo 0-3 e 6 mesi (curve D_1 , D_2 e D_3 del grafico 1), dalla preparazione della soluzione standard di destrina, e abbiamo osservato che tali curve sono praticamente sovrapponibili; ciò dimostra che per lungo periodo di tempo, e almeno per tutto il tempo in cui sono state eseguite le misure riportate nella presente nota, la riproducibilità della colorazione destrina limite-iodio A è assicurata.

Secondo REDFERN [33] è poi importante effettuare i confronti colorimetrici tra i composti colorati «prodotti di idrolisi-iodio B» e «destrina standard-iodio A», ad una determinata temperatura.

Noi abbiamo riconfermato i risultati di REDFERN: infatti, facendo le comparazioni colorimetriche, per uno stesso estratto enzimatico, una volta a 10°C e una volta a 30°C, abbiamo ottenuto a 10°C un tempo di destrinizzazione di 33' e a 30°C un tempo di destrinizzazione di 19'.

La dipendenza del tempo di destrinizzazione dalla temperatura alla quale si eseguono le comparazioni colorimetriche, è dovuta al fatto che il composto «prodotti di idrolisi-iodio B» presenta una colorazione diversa a seconda della temperatura.

Infatti, tale composto dà origine a due curve spettrofotometriche diverse a 10°C e a 30°C ($I_{10^\circ C} - I_{30^\circ C}$ grafico 1).

A 10°C si osserva una trasmittanza T minore di quella a 30°C: di qui il maggior tempo di destrinizzazione a 10°C. Viceversa, il composto «destrina-iodio A» presenta una colorazione che è quasi completamente indipendente dalla temperatura (la curva D₄, eseguita a 10°C si sovrappone completamente alla curva D₂ eseguita contemporaneamente a 30°C).

In conseguenza di tutto ciò abbiamo eseguito costantemente le nostre misure:

a) controllando il grado di degradazione del substrato e la sua concentrazione;

b) eseguendo le comparazioni colorimetriche ad una temperatura di 30°C (in camera calda).

L'attività α -amilolitica è stata sempre espressa in unità α -amilolitiche (U. α .A.), cioè in g di amido degradato in 1h (a 30°C e a pH 4,6) da una quantità di semi (nei vari stadi considerati) equivalente ad 1 g di farina secca.

Nella tabella I sono riportati i valori ottenuti, col metodo suddetto, su 10 campioni provenienti da 5 estratti enzimatici diversi: da essi è possibile calcolare l'errore sperimentale e constatare la loro riproducibilità.

TABELLA I
Dosaggio dell'attività α -amilolitica:
errore sperimentale e riproducibilità dei valori.

Estratto N.	U. α . A. per campione	U. α . A. per estratto	Errore sperim. (diff. % tra le misure relative allo stesso estratto)	Riproducibilità (Diff. % tra ciascun estratto e la media generale)
I } 1 ^o campione	4,78	4,73	$\pm 1,05$	$\pm 0,63$
} 2 ^o »	4,68			
II } 1 ^o »	4,68	4,68	$\pm 0,00$	- 0,42
} 2 ^o »	4,68			
III } 1 ^o »	4,76	4,78	$\pm 0,42$	+ 1,67
} 2 ^o »	4,80			
IV } 1 ^o »	4,64	4,68	$\pm 0,64$	- 0,46
} 2 ^o »	4,72			
V } 1 ^o »	4,63	4,65	$\pm 0,43$	- 1,07
} 2 ^o »	4,67			
Media generale		4,70		

B) *Misura dell'attività β -amilolitica.*

La misura dell'attività β -amilolitica dei nostri estratti enzimatici é stata eseguita col metodo di KNEEN e SANDSTEDT [33] da noi modificato. Tali AA., nel 1941, misero a punto un metodo per il dosaggio della β -amylasi nei cereali germinanti ed allo stato di quiescenza, che consisteva nel misurare, nel campione enzimatico in esame:

1) *l'attività α -amilolitica col metodo di SANDSTEDT già riferito (in U. α .A.);*

2) *il potere maltogenetico totale, cioè la quantità di glucidi riducenti che, in determinate condizioni sperimentali, si ottengono per azione dell' α - e della β -amilasi sull'amido.*

Tale potere si esprime in maltosio, anche se tale glucide non è l'unico che si ottiene.

Dai valori così ottenuti si calcolano successivamente:

a) *il potere maltogenetico dell' α -amilasi, cioè il maltosio (maltosio apparente) prodotto da tale enzima. Detto calcolo si esegue mediante l'uso di apposite tabelle che sono state stabilite dagli AA., determinando contemporaneamente i tempi di destrinizzazione ed il potere maltogenetico che si ottengono da quantità scalari di α -amilasi pura;*

b) *il potere maltogenetico della β -amilasi, che si ottiene per differenza e da cui si ricava l'attività β -amilolitica che si esprime in U. β . A., intendendo per esse i g di maltosio che in 1h (a 30° C e a pH 4,6) si ottengono da una quantità di semi (nei vari stadi considerati) equivalenti ad 1 g di farina secca.*

Utilizzando tale metodo, uno di noi misurò l'attività β -amilolitica dei semi di *C. e.* e la trovò assente [27].

Nelle ricerche riportate nella presente nota abbiamo evitato di usare il su riportato metodo di KNEEN e SANDSTEDT [33] nella versione originale, in quanto le tabelle che danno la corrispondenza fra attività α -amilolitica e tempi di destrinizzazione possono essere utilizzati con sicurezza solo per l' α -amilasi del malto di cereali. Per le α -amilasi di altra provenienza, l'utilizzazione delle tabelle è possibile soltanto se l'enzima presenta le stesse modalità di azione, ossia degrada l'amido allo stesso modo. Lo stesso KNEEN, ad esempio, non potè utilizzare il suo metodo per le amilasi del sorgo [25].

Poichè le ricerche eseguite da uno di noi [30] hanno messo in evidenza la differenza delle modalità di azione dell' α -amilasi della *C. e.* e di quella del malto, abbiamo preferito evitare l'uso delle tabelle di KNEEN e SANDSTEDT e determinare l'attività β -amilolitica, nel modo seguente, da noi ideato:

a) si misura il potere maltogenetico prima e dopo aver riscaldato

l'estratto enzimatico per 15' a 70° C. Nel primo caso si ha *il potere maltogenetico totale*; nel secondo caso, *il potere maltogenetico della sola α -amilasi che non ha subito l'inattivazione termica*;

b) si misura, quindi, l'attività α amilolitica dell'estratto prima e dopo averlo riscaldato per 15' a 70° C. Il rapporto fra le due misure si chiama « coefficiente di inattivazione termica » e dà la misura dell'entità dell' α -amilasi che, in simili condizioni, si inattiva. Se si osserva la tabella IV si rileva che, in effetti, il coefficiente di inattivazione termica dell' α -amilasi è uguale o di poco superiore all'unità e ciò conferma la notevole termostabilità dell' α -amilasi della *C. e.*, da uno di noi già messa in evidenza (27).

Dividendo il potere maltogenetico dell' α -amilasi che non ha subito inattivazione termica, per il coefficiente di inattivazione termica si ottiene il potere maltogenetico effettivo dell' α -amilasi presente in quelle condizioni. La differenza fra il potere maltogenetico totale e quello effettivo, riferibile all' α -amilasi, dà il potere maltogenetico della β -amilasi, da cui si ricava l'attività β -amilolitica in U. β . A.

RISULTATI

a) Attività α -amilolitica.

I risultati della misura dell'attività α -amilolitica dei semi di *C. e.*, relativi a tre serie di esperimenti eseguiti in eguali condizioni sperimentali, sono riportati nella tabella II e nel grafico n. 2.

TABELLA II

Risultati delle misure dell'attività α -amilolitica durante la germinazione.

Stadio di germinazione	Attività α -amilolitica in U. α . A.		
	1° Gruppo	2° Gruppo	3° Gruppo
I	4,80	4,73	4,68
II	3,80	3,71	3,14
III	5,07	4,57	6,46
IV	3,92	4,33	6,15
V	5,00	—	—
VI	5,51	3,32	6,15
VII	—	6,32	7,40

Dall'esame dei risultati si osserva che :

1) passando dallo stadio I allo stadio II, l'attività α -amilolitica dei semi di *C. e.* diminuisce costantemente :

2) quando si passa dallo stadio II a quello successivo (III), l'attività α amilolitica dei semi di *C. e.* aumenta di nuovo ;

3) durante gli stadi successivi IV, V e VI, l'attività α -amilolitica subisce una nuova diminuzione, raggiungendo un valore minimo che pe-

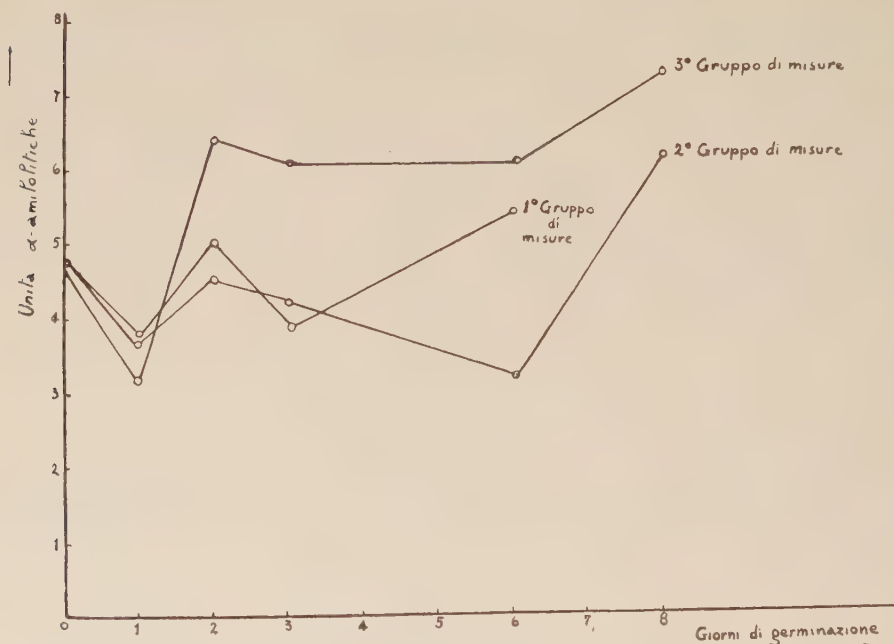


GRAFICO n. 2 — Attività α -amilolitica in funzione dei giorni di germinazione. (corrispondenti agli stadi presi in considerazione).

raltro varia da serie a serie e poi, allorchè si passa allo stadio VII, in tutte e tre le serie di misure l'attività aumenta, presentando sempre dei valori notevolmente maggiori di quelli iniziali.

Nella tabella III e nel grafico n. 3 si riportano i valori che si riferiscono all'attività α -amilolitica ed al grado di imbibizione raggiunto durante il periodo di germinazione considerato. Dall'esame dei dati riportati si può osservare che :

1) durante il passaggio dal I al II stadio l'attività α -amilolitica ed il grado di umidità presentano un andamento opposto. Mentre, infatti, l'umidità diventa all'incirca 3,5-4 volte quella iniziale, l'attività α -amilolitica decresce diventando 0,7-0,8 volte quella iniziale (vedi rispettivamente colonne 3 e 6 della tabella III).

TABELLA III

Valori dell'attività α -amilolitica e dell'umidità
durante la germinazione dei semi di *C.e.*

Stadio della germinazione	Umidità %	Variazioni dell'umidità rispetto a quella iniziale	Attività α -amilolitica in U. a. A.	Variazioni % dell'attività α -amilolitica rispetto a quella iniziale
1° Gruppo di misure				
I	13,58	1,00	4,80	1,00
II	56,67	4,17	3,80	0,79
III	63,55	4,70	5,07	1,05
IV	63,84	4,67	3,92	0,81
V	69,29	5,10	5,00	1,04
VI	69,35	5,11	5,51	1,14
VII	—	—	—	—
2° Gruppo di misure				
I	13,54	1,00	4,73	1,00
II	51,16	3,77	3,71	0,78
III	56,40	4,16	4,57	0,96
IV	60,24	4,44	4,33	0,97
V	—	—	—	—
VI	69,28	5,11	3,32	0,70
VII	81,89	6,04	6,32	1,35
3° Gruppo di misure				
I	13,80	1,00	4,68	1,00
II	47,80	3,54	3,14	0,67
III	62,70	4,65	6,46	1,38
IV	66,29	4,91	6,15	1,31
V	—	—	—	—
VI	69,07	5,12	6,15	1,31
VII	79,51	5,89	7,40	1,58

Abbiamo voluto accertarci se, durante l'imbibizione, una parte dell'enzima potesse passare nell'acqua esterna attraverso un'incisione che veniva costantemente praticata nel tegumento seminale prima dell'immer-

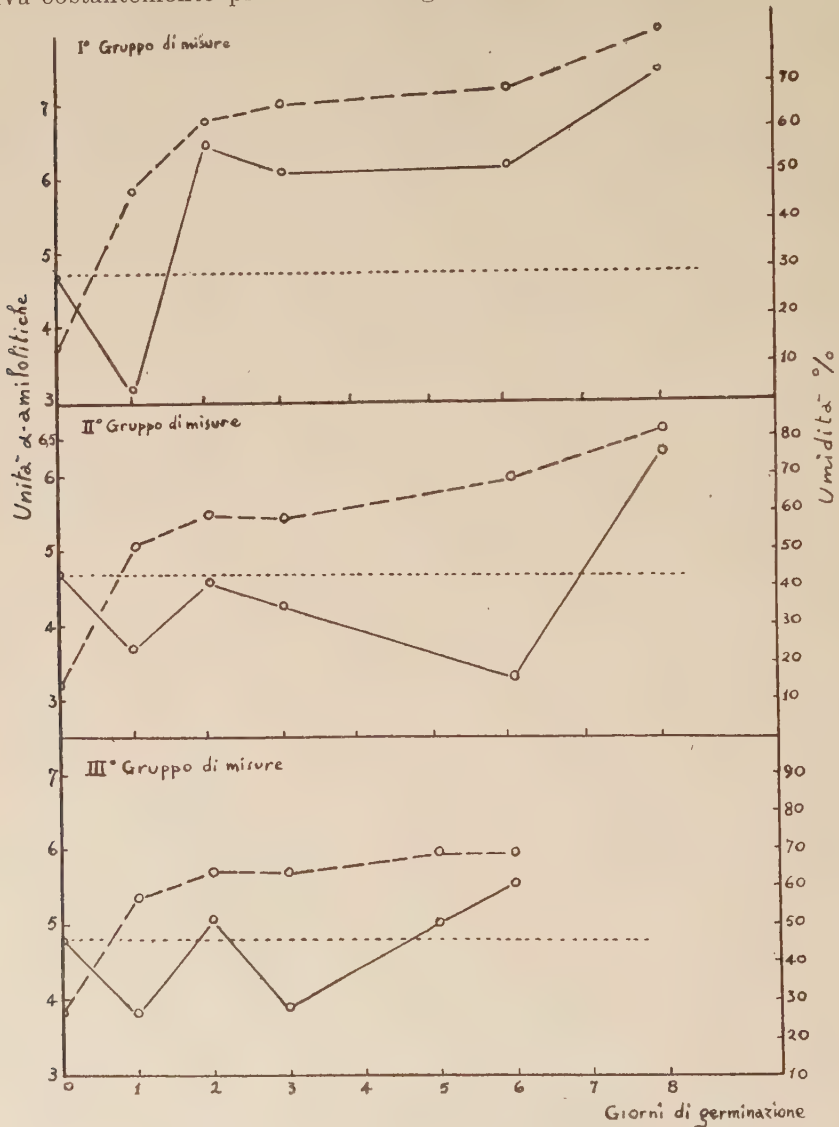


GRAFICO n. 3 — Attività α -amilolitica e umidità in funzione dei giorni di germinazione.

Linea punteggiata: Attività α -amilolitica iniziale;

Linea intera: Attività α -amilolitica col procedere della germinazione;

Linea tratteggiata: Grado di umidità % col procedere della germinazione.

sione, e andasse pertanto perduta. A tale proposito abbiamo misurato l'attività α -amilolitica di un lotto di semi e quella dell'acqua di imbibizione (in quest'ultimo caso abbiamo adoperato il micrometodo di STONE [32]

ed abbiamo trovato nell'acqua un'attività di circa il 0,04 $\frac{''}{''_0}$ rispetto a quella del lotto di semi messi ad imbibire, mentre questi ultimi presentano una perdita di attività, rispetto allo stato di quiescenza, del 20 $\frac{''}{''_0}$. Quindi, la diminuzione osservata non è giustificabile con una perdita dell'enzima nell'acqua di imbibizione;

2) per ciò che riguarda i valori successivi a quelli dello stadio II, si deve rilevare che all'andamento caratteristico già descritto, presentato dall'attività α -amilolitica, fa riscontro un aumento continuo del grado di imbibizione.

Non c'è, pertanto, una evidente relazione tra il grado di imbibizione raggiunto dai semi e le variazioni di attività enzimatica pur osservando che, ad elevato grado di imbibizione (70 $\frac{''}{''_0}$), corrispondono i valori più elevati di attività α -amilolitica

b) Attività β -amilolitica.

I risultati ottenuti dalla determinazione dell'attività β -amilolitica (tabella IV) mostrano che:

1) nei semi di *C.e.* allo stato di quiescenza è possibile mettere in evidenza, con il metodo più sopra descritto, solo tracce di β -amilasi. Infatti, 1 g di farina allo stato secco presenta, accanto ad una attività α -amilolitica di 4,68 U. α . A., un'attività β amilolitica di solo 0,015 U. β . A.

Tali bassi valori dell'attività β -amilolitica non erano rivelabili col metodo di KNEEN e SANDSTEDT (33) e, pertanto, i risultati odierni non sono in contrasto con quelli trovati da uno di noi (28), in base ai quali fu affermata l'assenza di attività β -amilolitica nei semi di *C.e.* allo stato di quiescenza. D'altra parte i semi analizzati col primo lavoro erano vecchi, avevano perduto la capacità di germinare ed in essi anche l'attività α -amilolitica era ridotta;

2) durante la germinazione l'attività β -amilolitica, pur mantenendosi sempre bassissima, aumenta col progredire del grado di imbibizione e della germinazione. Tuttavia, si tratta sempre di tracce di attività; infatti, la massima attività β -amilolitica è di 0,098 U. β .A.

Nella tabella IV sono riportati anche i valori dei rapporti tra attività β -amilolitica e α -amilolitica di uno stesso campione di semi, e per vari stadi di germinazione. È possibile, così, osservare che tali rapporti variano da un minimo di 0,0032:1 per i semi allo stato di quiescenza, ad un massimo di 0,0132:1 per i semi allo stadio VII. Questi valori, mentre confermano la scarsa attività β -amilolitica presentata dai semi, anche nei diversi stadi della germinazione, dimostrano la mancanza di parallelismo nell'andamento dei valori che si riferiscono all'attività dei due enzimi: l'attività β -amilolitica cresce con maggior velocità.

TABELLA IV
Valori dell'attività β -amilolitica e suoi rapporti con l'attività
 α -amilolitica in uno stesso campione.

Stadio della germin.	U. α . A.		Coeff. di inattiv. termica $\frac{a}{b}$	Potere maltogenetico in mg di maltosio/g di farina secca					U β . A.	U. β A., U. α A.
	Prima della inattiv. termica (a)	Dopo l' inattiv. termica (b)		Prima della inattiv. termica	Dopo l' inattiv. termica	Potere maltog. della α amil.	Potere maltog. della β amil.			
I	4,68	4,68	1,00	54,20	50,00	50,00	4,20	0,015	0,0082 : 1	
II	3,14	3,14	1,00	46,00	39,00	39,00	7,00	0,026	0,0082 : 1	
III	6,46	6,46	1,00	87,90	77,90	77,90	10,00	0,038	0,0058 : 1	
IV	6,15	6,07	1,01	89,00	78,00	79,00	10,00	0,038	0,0061 : 1	
V	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
VI	6,15	5,86	1,11	99,00	74,00	82,00	17,00	0,064	0,0104 : 1	
VII	7,40	7,08	1,04	115,00	85,57	89,00	26,00	0,098	0,0132 : 1	

Conclusioni.

Le determinazioni delle attività α - e β -amilolitiche dei semi di *C.e.* durante alcuni stadi di germinazione, hanno permesso di rilevare che:

a) l'attività α -amilolitica decresce durante l'imbibizione preliminare, poi subisce qualche variazione per raggiungere, al termine del periodo di tempo considerato (8 giorni), valori notevolmente maggiori di quelli iniziali;

b) non si osserva un rapporto tra attività α -amilolitica ed il grado di umidità dei semi: i valori ad essi relativi presentano infatti, durante l'imbibizione preliminare, un andamento opposto e successivamente, mentre il grado di imbibizione cresce col progredire della germinazione, l'attività α -amilolitica presenta l'andamento caratteristico già descritto;

c) l'attività β -amilolitica, pur essendo bassissima, tende costantemente a crescere col progredire della germinazione e del grado di imbibizione;

d) durante la germinazione il rapporto attività β -amilolitica/attività α -amilolitica va costantemente aumentando, indice questo che la β -amilasi aumenta la sua attività con una velocità maggiore.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. TONZIG. *Botanica*. Vol. 1, pag. 158. Milano (1949).
- [2] N. P. BADENHUIZEN. « *Protoplasma* », **28**, 293 (1937).
Ibid., **29**, 246 (1938).
- [3] A. FREY - WISLING. *Submicroscopic morphology of protoplasm and its derivatives*. Elsevier, N. Y. (1948).
- [4] T. DE LEO, M. R. DE MARCO, F. BADOLATO. « *Ric. Scient.* », **27**, 1812 (1957).
- [5] C. L. ALSBERG. « *Proc. Exptl. Biol. Med.* », **36**, 127 (1937).
- [6] S. SCHWIMMER. « *J. Biol. Chem.* », **161**, 219 (1945).
- [7] E. WALDSCHMIDT-LEITZ e K. MAYER. « *Z. Physiol. Chem.* », **236**, 168 (1935).
- [8] E. WALDSCHMIDT-LEITZ, M. SAMEC e K. MAYER. « *Z. Physiol. Chem.* », **250**, 192 (1937).
- [9] M. J. BLISH, R. M. SANDSTEDT e A. MEECAM. « *Cereal Chem.* », **14**, 605 (1937).
- [10] T. DE LEO, U. MANFREDI. « *Ric. Scient.* », **27**, 2426 (1957).
- [11] S. SCHWIMMER. « *Cereal Chem.* », **24**, 167 (1947).
- [12] J. L. BAKER e K. HULTON. « *J. Chem. Soc.* », **121**, 1929 (1922).
- [13] K. MYRBÄCK e N. J. ORTENBLAD. « *Enzymologia* », **2**, 305 (1937).
- [14] S. R. SNIDER. « *Cereal Chem.* », **18**, 186 (1941).
- [15] W. UGRIMOW. « *Biochem. Z.* », **282**, 74 (1935).
- [16] T. ANDREUS e C. H. BAILEY. « *Cereal Chem.* », **11**, 551 (1934).
- [17] L. J. HILDEBRAND e R. BURKERT. « *Cereal Chem.* », **19**, 27 (1942).
- [18] E. KNEEN. « *Cereal Chem.* », **21**, 304 (1944).
- [19] D. A. COLEMAN, S. R. SNIDER e R. DICKSON. « *Cereal Chem.* », **11**, 523 (1934).
- [20] E. ÖHLSON e I. K. HELDFELDT. « *Z. Physiol. Chem.* », **221**, 174 (1933).
- [21] J. M. NEWTON e N. M. NAYLOR. « *Cereal Chem.* », **16**, 71 (1939).
- [22] S. LAUFER, H. TAUBER e C. F. DAVIS. « *Cereal Chem.* », **21**, 267 (1944).
- [23] V. D. MARTIN, J. M. NEWTON. « *Cereal Chem.* », **15**, 456 (1938).
- [24] J. M. NEWTON, R. M. HICKSON e N. M. NAYLOR. « *Cereal Chem.* », **20**, 23 (1943).

- [25] A. K. BALLS, R. R. THOMPSON e M. K. WALDEN. « J. Biol. Chem. », **163**, 571 (1946).
Ibid., **173**, 9 (1948).
- [26] E. KNEEN. « Cereal Chem. », **22**, 112 (1945).
- [27] K. SHUKLA. « J. Indian Chem. », **21**, 223 (1944).
- [28] T. DE LEO. « Ric. Scient. », **24**, 1445 (1954).
Ibid., **24**, 1648 (1954).
- [29] R. M. SANDSTEDT, E. KNEEN e M. J. BLISH. « Cereal Chem. », **16**, 712 (1939).
- [30] T. DE LEO e G. BARONE. « Ric. Scient. », **25**, 3060 (1955).
Ibid., **25**, 3350 (1955).
Ibid., **26**, 131 (1956).
- [31] S. REDFERN. « Cereal Chem. », **24**, 259 (1947).
- [32] R. W. STONE. « Cereal Chem. », **29**, 228 (1952).
- [33] E. KNEEN e R. M. SANDSTEDT. « Cereal Chem. », **18**, 237 (1941).

LA RIPARTIZIONE DELLE ATTIVITÀ AMILOLITICHE TRA LE VARIE
PARTI DEL SEME E DELLA PLANTULA DI *Canavalia ensiformis*
DURANTE LA GERMINAZIONE

*Nota dei dott. Teodoro De Leo e Lidia Foti,
presentata dal socio Antonietta Orrù ¹⁾.*

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. — È stato seguito, durante varie fasi di germinazione dei semi di *Canavalia ensiformis*, l'andamento delle attività α e β -amilolitiche nei cotiledoni e nei relativi complessi radichetta-piumetta, mettendo in rilievo in questi ultimi la presenza di un inibitore dell' α -amilasi.

In precedenti note abbiamo riferito i risultati ottenuti determinando l'attività amilolitica presentata dai semi di *Canavalia ensiformis* durante la germinazione [1], e la ripartizione di tale attività enzimatica tra complesso piumetta-radichetta e cotiledoni nei semi allo stato di quiescenza [2].

Abbiamo voluto, ora, per integrare e meglio spiegare i precedenti risultati, esaminare la ripartizione dell'attività amilolitica tra complesso piumetta-radichetta e cotiledoni nei semi durante la germinazione, fatta avvenire nelle stesse condizioni sperimentali indicate in precedenza [1].

In letteratura esistono ben pochi lavori sulla distribuzione delle amilasi nelle varie parti del seme, e quasi tutti si riferiscono alle cariossidi di cereali ad elevata attività amilolitica, quali quelle di orzo, di frumento e di riso. LINDERSTRÖM-LANG ed ENGEL hanno trovato [3] [4] [5] che in tali semi le cellule aleuroniche, l'embrione e l'endosperma amilaceo hanno poco o nulla attività amilolitica, mentre viceversa presentano elevata attività sia lo strato di cellule ricche di proteine che si trovano immediatamente al di sotto dello strato aleuronico, sia l'endosperma posto ad immediato contatto con lo scutello. I suddetti AA. non hanno trovato differenza tra α - e β -amilasi riguardo alla distribuzione nelle diverse parti del seme.

Pochi lavori riguardano, invece, le leguminose: STRAFFORD [6] trova che nei piselli, sia allo stato di quiescenza che dopo 6 giorni di germinazione, l'attività amilolitica è uguale sia nel cotiledone che nell'asse radice-germoglio.

¹⁾ Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'Istituto di Fisiologia Generale dell'Università di Napoli.

Nella presente nota riportiamo, pertanto, i risultati da noi ottenuti determinando la ripartizione delle attività α - e β -amilolitiche tra cotiledoni e complesso piumetta-radichetta nei semi di *C. e.* durante la germinazione.

PARTE SPERIMENTALE

a) *Tecnica di germinazione e preparazione degli estratti enzimatici.*

Nelle ricerche riportate nella presente nota è stata utilizzata la tecnica di germinazione riferita nei particolari in una nota precedente [1] e le determinazioni sono state eseguite nei vari stadi, in essa riportati.

Anche gli estratti enzimatici sono stati preparati con le modalità già riferite [1], usando le seguenti concentrazioni:

1) *Per la misura dell'attività α -amilolitica:*

Semi in toto e cotiledoni allo stato di quiescenza: 2,5 %.

Semi in toto e cotiledoni imbibiti e germinanti: 5 %.

Complessi piumetta-radichetta allo stato di quiescenza: 1 %.

Complessi piumetta-radichetta imbibiti e germinanti: 2,5 %.

2) *Per la misura dell'attività β -amilolitica:*

Semi in toto e cotiledoni allo stato di quiescenza: 5 %.

Semi in toto e cotiledoni imbibiti e germinanti: 10 %.

Complessi piumetta-radichetta allo stato di quiescenza: 2 %.

Complessi piumetta-radichetta imbibiti e germinanti: 5 %.

Queste concentrazioni sono state scelte in considerazione della differente attività enzimatica dei diversi estratti vegetali, per rendere quanto più vicini i valori delle varie misure.

Dei semi, o delle varie parti di essi, veniva determinato il contenuto percentuale di acqua, in modo da poter riferire i risultati alla farina allo stato secco.

b) *Misura dell'attività enzimatica.*

La misura dell'attività α -amilolitica dei nostri estratti è stata eseguita con:

1) il metodo di SANDSTEDT e coll. [7] da noi modificato, come risulta dalla nota precedente [1], per gli estratti dei semi in toto e dei cotiledoni;

2) il micrometodo di STONE [8] per gli estratti del complesso piumetta-radichetta.

La misura dell'attività β -amilolitica dei nostri estratti è stata eseguita sempre col metodo di KNEEN e SANDSTEDT [9] da noi modificato secondo le indicazioni riferite nella precedente nota [1].

Data la bassa attività presentata dal complesso piumetta-radichetta, nella misura dell'attività enzimatica degli estratti relativi a quest'ultimo,

abbiamo fatto agire gli estratti stessi sull'amido per 120', anzichè per 15', riducendo poi i valori allo stesso periodo di tempo per renderli comparativi.

RISULTATI

A) Attività α -amilolitica.

Nella tabella I e nel grafico n. 1 si riportano i risultati dell'attività α -amilolitica relativi a due gruppi di misure eseguite sui semi in toto, sui soli cotiledoni e sul complesso piumetta-radichetta, durante il periodo e gli stadi di germinazione già da noi presi in considerazione [1], e riferite

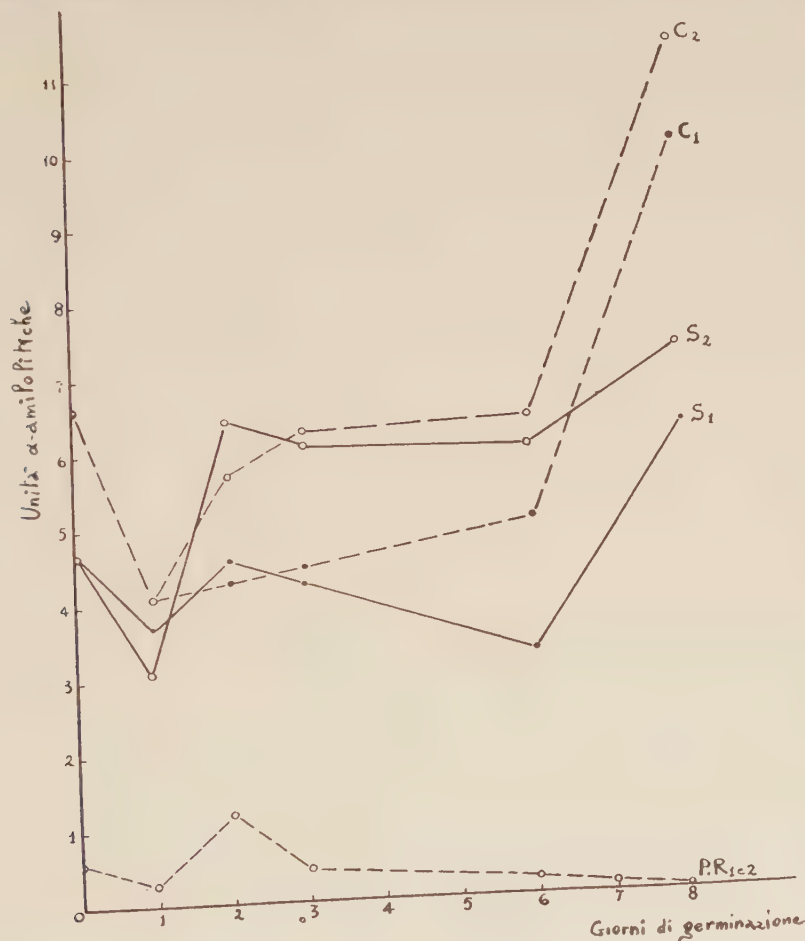


GRAFICO n. 1 — Attività α -amilolitica in funzione dei giorni di germinazione:

C₁ e C₂ = nei soli cotiledoni rispettivamente del 1° e 2° gruppo di misure;

S₁ e S₂ = nei semi in toto germinanti rispettivamente del 1° e 2° gruppo di misure;

P. R.₁₊₂ = nei soli complessi piumetta-radichetta dei due gruppi, i cui valori coincidono.

TABELLA I

Risultati delle misure dell'attività α -amilolitica delle varie parti dei semi di *C. e.* durante la germinazione.

Stadio di germinazione (1)	U m i d i t à %			U. a. A.		
	Seme intero (2)	Cotiledoni (3)	Complesso piumetta-radi- chetta (4)	Seme intero (5)	Cotiledoni (6)	Complesso piumetta-radi- chetta (7)
1° Gruppo di misure						
I	13,54	13,50	13,30	4,73	6,65	0,67
II	51,16	50,07	40,40	3,71	4,10	0,28
III	56,40	54,40	79,20	4,57	2,28	1,20
IV	60,24	55,28	81,56	4,33	4,48	0,45
V	—	—	—	—	—	—
VI	69,80	60,90	86,40	3,32	5,10	0,16
VII	89,89	73,61	88,10	6,32	10,13	0,08
2° Gruppo di misure						
I	13,80	13,40	13,25	4,68	6,65	0,67
II	47,80	47,20	38,05	3,14	4,04	0,28
III	62,70	61,73	82,60	6,46	5,75	1,20
IV	66,29	64,91	86,84	6,15	6,30	0,45
V	—	—	—	—	—	—
VI	69,07	64,05	88,30	6,15	6,47	0,16
VII	79,51	69,85	89,90	7,40	11,50	0,08

ad una quantità di semi, nei vari stadi di sviluppo, equivalente ad 1 g di sostanza secca.

Prendendo in esame i risultati si può osservare che :

1) durante il passaggio dal I stadio a quello II l'attività α -amilolitica dei semi in toto, dei cotiledoni e del complesso piumetta-radichetta diminuisce costantemente;

2) passando dal II stadio a quello III l'attività α amilolitica aumenta di nuovo, sia per i semi in toto come per i cotiledoni ed il complesso piumetta-radichetta, considerati separatamente;

3) durante gli stadi IV, V, VI e VII l'attività γ -amilolitica presenta un andamento diverso nelle varie parti considerate: nei semi in toto, infatti, come si è visto, subisce una seconda diminuzione, prima di riprendere ad aumentare; nei cotiledoni aumenta, invece, regolarmente e notevolmente, con l'aumentare dei giorni di germinazione, specialmente quando si osserva la formazione delle « prime foglioline embrionali »; nel complesso piumetta-radichetta diminuisce col passare dei giorni di germinazione, fino a ridursi a zero.

Nel grafico n. 2 è riportata, in funzione dei giorni di germinazione, sia l'attività α amilolitica, sia l'umidità $\%$ dei semi interi, dei soli cotiledoni e del solo complesso piumetta-radichetta.

È possibile, così, osservare che :

1) per i cotiledoni, durante il periodo di imbibizione (dal I al II stadio delle misure), l'andamento dell'attività enzimatica è diametralmente opposto a quello del grado di umidità raggiunto e precisamente, ad un incremento dell'umidità corrisponde un decremento dell'attività enzimatica. Successivamente, invece, aumentano, sia pure non proporzionalmente, attività α -amilolitica ed umidità;

2) nel caso del complesso piumetta-radichetta, durante l'imbibizione iniziale del seme, si ha il solito andamento opposto tra umidità e attività enzimatica; nella fase di sviluppo iniziale del complesso piumetta-radichetta (stadio III), umidità e attività enzimatica aumentano contemporaneamente e le due curve sono quasi parallele; negli stadi successivi della germinazione, mentre l'umidità presenta valori in lieve aumento, l'attività α -amilolitica decresce fino a tendere a zero.

Allo scopo di osservare se, durante la germinazione fosse rilevabile, come nei semi allo stato di quiescenza [10], la presenza di un inibitore dell'attività α -amilolitica, nella tabella II si riportano :

a) i rapporti ponderali tra cotiledoni e complesso piumetta-radichetta (colonne 2 e 3), per grammo di seme secco;

b) i valori dell'attività α -amilolitica relativi ad 1 g di farina secca proveniente rispettivamente dai cotiledoni e dai complessi piumetta-radichetta (colonne 4 e 5);

c) i valori dell'attività α -amilolitica relativi alla reale quantità di fa-

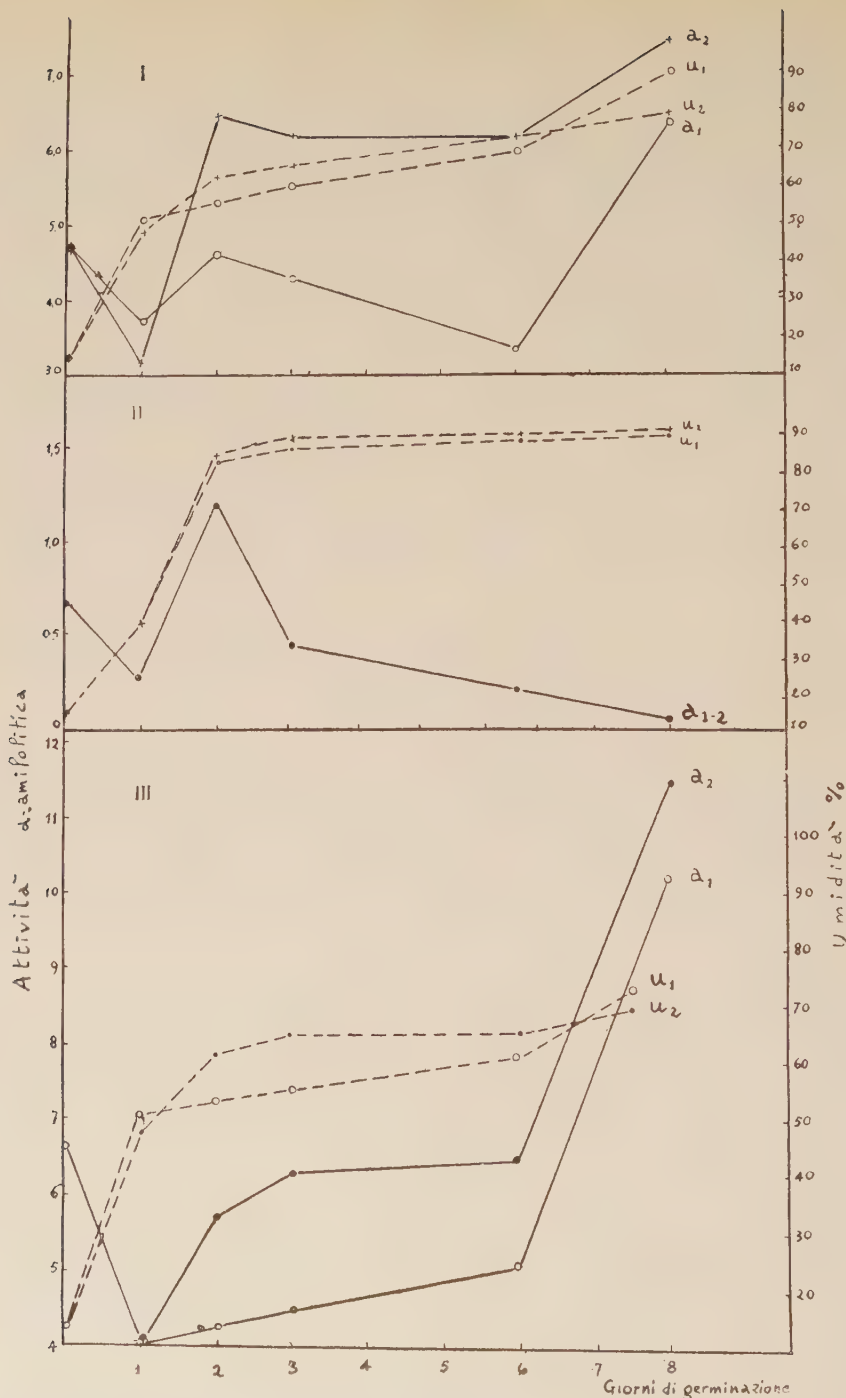


GRAFICO n. 2 — Relazione tra attività α -amilolitica e grado di imbibizione in funzione dei giorni di germinazione:

I) Nei semi interi; II) Nel solo complesso piumetta-radichetta; III) Nei soli cotiledoni:

a_1 e a_2 attività α -amilolitica rispettivamente nei gruppi 1 e 2;

u_1 e u_2 umidità % rispettivamente nei gruppi 1 e 2.

rina rispettivamente derivante dai cotiledoni e dai complessi piumetta-radichetta e corrispondente ad 1 g di farina di semi interi senza il tegumento seminale (colonne 6 e 7).

Sommando i risultati delle colonne 6 e 7 si ottiene l'attività che dovrebbe avere teoricamente un grammo di farina di semi interi, basandosi sull'attività enzimatica determinata separatamente sull'aliquota di farina proveniente dai cotiledoni e su quella dei complessi piumetta-radichetta. I valori teorici di tale attività sono riportati nella colonna 8. Essi possono essere messi a paragone con quelli risultanti dalle misure eseguite sul seme in toto e che vengono riportate nella colonna 9.

L'esame della tabella II mostra che :

1) in 1 g di farina proveniente dai semi in toto (ai vari stadi di germinazione) l'aliquota derivante dal complesso piumetta-radichetta è piccola e varia dall'1 al 9 ‰; tale fatto, unito alla bassa attività α -amilolitica del complesso piumetta radichetta rilevabile dai valori della colonna 7, fa sì che il contributo da questo dato all'attività del seme intero appaia quasi trascurabile, per cui in pratica si può affermare che l'attività enzimatica del seme è concentrata nel cotiledone;

2) la differenza fra l'attività α -amilolitica del seme in toto, che è possibile così calcolare teoricamente (colonna 10) dalla tabella II e quella effettivamente misurata (colonna 9, in cui si riportano i valori della tabella II, colonna 5) mostra che nei semi interi allo stadio I, l'attività α -amilolitica è minore, in realtà, di quella che dovrebbe essere in base all'attività dei cotiledoni in essi contenuti. Tale diminuzione di attività è di circa il 40 ‰: essa è dovuta alla presenza, nel complesso piumetta-radichetta, di un inibitore, come è stato da noi sperimentalmente dimostrato in un precedente lavoro [10];

3) tale azione inibitrice del complesso piumetta-radichetta si manifesta ancora, sia pure diminuita, dopo 24h di imbibizione. Successivamente questa azione inibitrice sembra scomparire durante il progredire dello sviluppo del complesso piumetta-radichetta, ma, nelle ultime fasi della germinazione da noi prese in considerazione, essa fa risentire la sua influenza, per cui si osserva un valore dell'attività α -amilolitica nel seme intero all'incirca eguale a quello iniziale, e cioè all'incirca del 41-44 ‰ inferiore a quello dovuto ai soli cotiledoni. [In realtà, come si è visto, le aliquote dovute al complesso piumetta-radichetta sono trascurabili (colonna 7 tabella II)].

B) Attività β -amilolitica.

Nella tabella III sono riportati i risultati delle misure dell'attività β -amilolitica dei semi interi, dei cotiledoni e del complesso piumetta-radichetta, durante le fasi di germinazione da noi considerate.

TABELLA II

Confronti tra i valori determinati e quelli calcolati che si riferiscono all'attività α -amilolitica delle varie parti del seme durante la germinazione, per mettere in evidenza l'azione inibitrice del complesso piumetta-radichetta.

Stadio della germinazione	Rapporto ponderale fra le varie parti del seme (per g di sostanza secca)				Attività α -amilolitica in U. o. A.					Differenza fra la attività misurata e quella calcolata	
	Cotiledoni	Complesso piumetta-radichetta	(3)	(2)	Cotiledoni	Complesso piumetta-radichetta	a) di 1 g di farina secca proveniente da:		b) dovuta, in g di farina di semi interi, a:	c) di 1 g di farina di semi interi:	
							Cotiledoni	Complesso piumetta-radichetta		Calcolata (6+7)	Misurata (v. tab. 1)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
Prima serie di misure											
I	0,9897	0,0103	6,65	0,67	6,58	0,006	6,58	4,73	—1,85	—39,11	
II	0,9875	0,0125	4,10	0,28	4,04	0,003	4,04	3,71	—0,33	—8,89	
III	0,9810	0,0190	4,28	1,20	4,19	0,021	4,19	4,57	+0,38	+8,31	
IV	0,9702	0,0298	4,48	0,45	4,34	0,001	4,34	4,33	—0,01	—0,23	
V	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
VI	0,9300	0,0700	5,10	0,16	4,74	0,009	4,74	3,32	—1,42	—42,77	
VII	0,9035	0,0965	10,13	0,08	9,15	0,007	9,15	6,32	—2,83	—44,77	
Seconda serie di misure											
I	0,9903	0,0097	6,65	0,67	6,58	0,006	6,58	4,68	—1,90	—40,59	
II	0,9881	0,0119	4,04	0,28	3,99	0,003	4,04	3,14	—0,90	—28,66	
III	0,9825	0,0175	5,75	1,20	5,64	0,021	5,66	6,46	+0,41	+10,99	
IV	0,9722	0,0278	6,30	0,45	6,12	0,001	6,12	6,15	+0,03	+0,48	
V	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
VI	0,9383	0,0617	6,47	0,16	6,07	0,009	6,08	6,15	+0,07	+1,13	
VII	0,9131	0,0869	11,50	0,08	10,50	0,007	10,50	4,40	—3,10	—41,89	

Gli stessi valori sono espressi nel grafico 3, in funzione dei giorni di germinazione e messi in relazione al grado di umidità presentata dal materiale in esame a quel dato stadio di sviluppo (i cui valori sono riportati nella tabella n. 1).

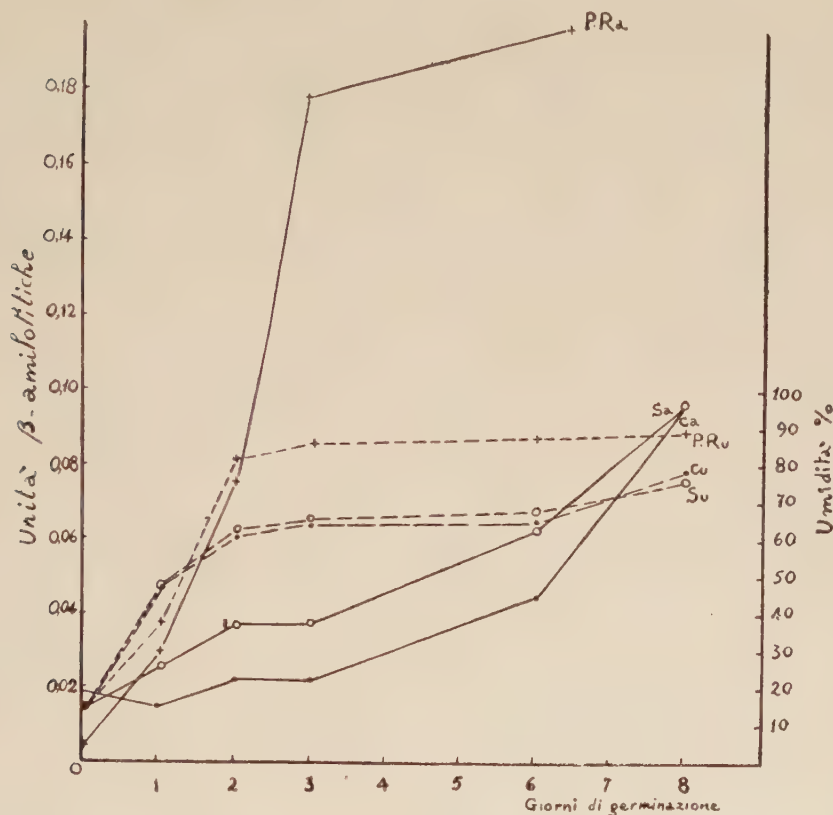


GRAFICO n. 3 — Relazione tra attività β -amilolitica e grado di imbibizione in funzione dei giorni di germinazione:

Sa = Attività β -amilolitica sui semi in toto germinanti;

Ca = » » sui soli cotiledoni;

P. Ra = » » sui soli complessi piumetta-radichetta;

Su = Umidità % dei semi in toto germinanti;

Cu = » % dei soli cotiledoni;

P. Ru = » % dei soli complessi piumetta-radichetta.

Dall'esame di tali risultati appare che :

1) l'attività β -amilolitica dei cotiledoni è bassa, è dello stesso ordine di grandezza ed ha lo stesso andamento di quella presentata dai semi interi : va da un minimo di 0,019 U. β . A. (allo stadio I) ad un massimo di 0,098 (allo stadio VII) con un regolare aumento durante il periodo di germinazione ;

2) l'attività β -amilolitica dei complessi piumetta-radichetta è anche essa bassa, andando da un minimo di 0,004 U. β . A. (stadio I) ad un massimo di 0,197 U. β . A. (stadio VII) con regolare aumento durante il periodo di germinazione;

3) l'attività β -amilolitica, messa in rapporto al grado di imbibizione, nei diversi giorni di germinazione, mostra un andamento parallelo per quel che riguarda il complesso piumetta-radichetta. Per i soli cotiledoni, come per i semi germinanti in toto, si può osservare che, mentre l'attività β -amilolitica cresce in maniera continua, il grado di umidità raggiunto dopo il secondo e terzo giorno (60 % circa) tende a mantenersi costante, raggiungendo all'ottavo giorno valori più elevati (80 %);

4) l'attività β -amilolitica rapportata a quella α -amilolitica è bassissima nei semi interi [nei quali il rapporto U. β . A./U. α . A. va da 0,0032:1 (stadio I) a 0,0132:1 (stadio VII)] e nei cotiledoni [nei quali il detto rapporto va da 0,0028:1 (stadio I) a 0,0085:1 (stadio VII)], mentre nei complessi piumetta-radichetta non è affatto trascurabile, anzi col progredire della germinazione diventa addirittura superiore a quella α -amilolitica. [I rapporti U. β . A./U. α . A. vanno da 0,0597:1 (stadio I) a 1,231:1 (stadio VII)];

5) i valori riportati nella stessa tabella permettono di osservare che il coefficiente di inattivazione termica per l' α -amilasi (la cui determinazione si è resa necessaria per ricavare i valori dell'attività β -amilolitica) è, anche in questi casi, eguale o di poco superiore all'unità, fatto questo che conferma la notevole termostabilità dell' α -amilasi della *C. e.* (la sua temperatura critica di inattivazione è infatti di 63° C.) già da noi messa in evidenza [2].

Per osservare un eventuale inibitore dell'attività β -amilolitica presente nel complesso piumetta-radichetta, analogamente a quanto è stato fatto in precedenza per l' α -amilasi (tabella II), si riportano nella tabella IV i valori dell'attività β -amilolitica determinati in confronto con quelli calcolati (in base all'attività delle due parti del seme ed alla composizione di quest'ultimo) durante la germinazione.

L'esame dei dati della colonna 9 e 10 mostra che tra i valori determinati e quelli calcolati si hanno soltanto piccole differenze, in meno o in più, che rientrano negli errori sperimentali; pertanto non è possibile, nel caso della β -amilasi, mettere in evidenza nel complesso piumetta-radichetta la presenza di sostanze ad azione inibitrice.

TABELLA IV

Confronti tra i valori determinati e quelli calcolati che si riferiscono all'attività β -amilolitica delle varie parti del seme durante la germinazione.

Stadio di germinazione (1)	Rapporto ponderale fra le varie parti del seme (per g di sostanza secca)		Attività β -amilolitica in U. B. A.				c) di l g di farina di semi interi:	
	Cotiledoni (2)	Complessi piumetta-radichetta (3)	a) dovuta a l g di farina secca proveniente da:		b) dovuta, in g di semi interi, a:		Calcolata (6+7) (8)	Misurata (v. tab. I) (9)
			Cotiledoni (4)	Complessi piumetta-radichetta (5)	Cotiledoni (2 4) (6)	Complessi piumetta-radichetta (3 x 5) (7)		
I	0,9903	0,0097	0,019	0,004	0,019	0,000	0,019	0,015
II	0,9881	0,0119	0,015	0,030	0,015	0,000	0,015	0,026
III	0,9825	0,0175	0,022	0,076	0,021	0,001	0,022	0,038
IV	0,9722	0,0278	0,022	0,178	0,021	0,005	0,026	0,038
V	—	—	—	—	—	—	—	—
VI	0,9383	0,0617	0,045	0,197	0,042	0,010	0,053	0,064
VII	0,9131	0,0869	0,098	—	0,089	—	—	0,098

Conclusioni.

Gli AA. hanno determinato le attività α - e β -amilolitiche delle varie parti (cotiledoni e complesso piumetta-radichetta) dei semi di *C.e.* durante alcuni stadi di germinazione.

I risultati mostrano che:

a) l'attività α -amilolitica dei cotiledoni, durante il periodo preliminare di imbibizione, decresce per poi aumentare regolarmente col progredire della germinazione. L'attività ed il grado di imbibizione presentano un andamento opposto, durante il periodo preliminare di imbibizione; poi aumentano entrambi nelle successive fasi di germinazione;

b) l'attività α -amilolitica dei complessi piumetta-radichetta, durante il periodo preliminare di imbibizione, decresce; successivamente subisce un aumento e poi, col passare dei giorni di germinazione, diminuisce di nuovo per ridursi a zero. L'attività α -amilolitica ed il grado di umidità presentano, in genere, un andamento opposto;

c) è possibile mettere in evidenza l'esistenza, nei complessi piumetta-radichetta, di un inibitore dell' α -amilasi;

d) l'attività β -amilolitica dei cotiledoni è bassissima; quella dei complessi piumetta-radichetta, pur essendo anche essa bassa, è però notevole in confronto all'attività α -amilolitica. L'attività β -amilolitica, in entrambi i casi, cresce col progredire della germinazione. Il suo andamento segue praticamente quello del grado di imbibizione particolarmente nel complesso piumetta-radichetta.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. DE LEO e L. FOTI. « Rend. Acc. Sc. fis. e mat. », s. 4^a, vol. XXV. Napoli, 1958.
- [2] T. DE LEO. « Ric. Scient. », **24**, 1445 (1954).
- [3] K. LINDERSTRÖM-LANG e C. ENGEL. « Enzymologia », **3**, 138 (1937).
- [4] C. ENGEL. « Rec. Trav. Chim. », **64**, 318 (1945).
- [5] C. ENGEL. « Biochem et Biophys. Acta », **1**, 42 (1947).
- [6] S. STRAFFORD. « Bull. Torrey Boton. Club », **79**, 351 (1952).
- [7] R. M. SANDSTEDT, E. KNEEN e M. J. BLISH. « Cereal Chem. », **16**, 712 (1939).
- [8] R. W. STONE. « Cereal Chem. », **29**, 228 (1952).
- [9] E. KNEEN e R. M. SANDSTEDT. « Cereal Chem. », **18**, 237 (1941).
- [10] T. DE LEO e L. FOTI. « Ric. Scient. », **26**, 2726 (1956).

IL PROBLEMA DELLE DISTORSIONI NEL CALCOLO A ROTTURA

*Nota del dott. ing. Eugenio Bruzzese,
presentata dal socio V. Franciosi*

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. — Si pone in rilievo l'opportunità di introdurre « il fattore di sicurezza s_D per sistemi distorcenti » che, in analogia a quello relativo alle forze, caratterizzi le risorse di una struttura nei riguardi delle distorsioni; considerata l'impossibilità di tener conto degli effetti di queste ultime, se si applica il calcolo a rottura (sotto l'aspetto del « limit design ») nella forma usuale, si propone un metodo che, senza venir meno ai presupposti del « limit design », renda operante questo procedimento anche in presenza di distorsioni.

1. *Premessa.* — Con riferimento ad una struttura iperstatica soggetta ad un sistema D_k di distorsioni (termiche, da ritiro o dovute a cedimenti anelastici dei vincoli) si voglia determinare il numero s_D che moltiplicato per D_k provoca il collasso della struttura: si rileva facilmente che una ricerca condotta attraverso il calcolo a rottura, applicato secondo l'usuale procedimento noto come « limit design », non può fornire il cercato moltiplicatore e che tale impossibilità è intrinseca del metodo. Infatti il « limit design » esamina la struttura all'atto dell'incipiente collasso quando essa ha acquistato un grado di libertà nei riguardi del moto rigido: se gli enti applicati sono le forze F_k , ciò accade per il valore $s_F \times F_k$ delle forze stesse, per il quale si formano $n + 1$ snodi plastici nella struttura n volte iperstatica. Sotto questa intensità costante dei carichi ha inizio e prosegue il moto rigido di crisi. Durante questo movimento la struttura si comporta come un insieme di elementi rigidi, collegati da cerniere plastiche e forniti, in complesso, di un grado di libertà; si prescinde quindi del tutto da considerazioni di carattere elastico ed il problema della determinazione del moltiplicatore di rottura dei carichi agenti si risolve attraverso equazioni di equilibrio, ovviamente ancora valide, nel rispetto di condizioni di plasticità che si sostituiscono a quelle di congruenza.

Se invece sulla stessa struttura, n volte iperstatica, agiscono delle distorsioni D_k , all'aumentare del loro valore si formeranno ancora e successivamente delle cerniere plastiche, ma, a partire dal valore $s_D \times D_k$ per il quale esse sono in numero di n , e cioè per il quale la struttura è dive-

nuta isostatica, l'intensità delle distorsioni può comunque aumentare senza che si formi la $(n + 1)$ -esima cerniera necessaria per l'inizio del collasso propriamente detto. Gli ulteriori incrementi delle distorsioni oltre il valore $s_D \propto D_k$ non sono risentiti dalla struttura se non sotto l'aspetto di possibili movimenti cinematici delle sue parti, proporzionali agli aumenti del valore delle distorsioni.

Lo schema cui si perviene non è più riconoscibile come schema di rottura nel senso noto, poichè il raggiungimento del valore limite $s_D \propto D_k$ delle distorsioni non dà inizio ad un moto rigido di collasso; questo potrebbe verificarsi solo per ulteriori incrementi del sistema di distorsioni $s_D \propto D_k$ e si arresterebbe al cessare di tali incrementi. Inoltre, mentre si può ancora operare una scelta della posizione delle cerniere di snervamento che rispetti le condizioni di plasticità, non è più possibile determinare l'incognita s_D attraverso equazioni di equilibrio; infatti in queste relazioni, che sono quelle caratteristiche della statica, non si ha modo di fare intervenire le distorsioni $s_D \propto D_k$.

Non ci si può quindi attendere che una ricerca relativa al problema delle distorsioni nel calcolo a rottura giunga alla determinazione di « distorsioni di rottura » nel senso già noto per le forze; si può facilmente però rilevare come il moltiplicatore s_D abbia nei riguardi dei sistemi distorcenti significato ed importanza non diversi da quelli del coefficiente di sicurezza s_F . Nelle strutture iperstatiche infatti le distorsioni, così come le forze, determinano caratteristiche di sollecitazione che, al crescere degli enti applicati, possono raggiungere valori inaccettabili; il fatto che il crescere delle distorsioni non possa portare la struttura fino al collasso (nel senso di conferirle la deformabilità cinematica) ma allo stadio immediatamente precedente (sistema isostatico) non rende superflua la ricerca della sicurezza nei riguardi di tale stadio. Basta esaminare la sicurezza di una struttura da un punto di vista più generale per riconoscere che il collasso è un caso particolare della perdita dei caratteri funzionali, e nei riguardi di questo evento una struttura n volte iperstatica con n snodi plastici rappresenta già uno stadio limite non più funzionale.

E' lecito inoltre considerare il coefficiente di sicurezza non solo come la misura dell'intervallo che separa lo stato di regime della struttura dalla crisi ma anche come il mezzo per valutarne il buon funzionamento a regime, comparandolo al comportamento di un modello limite (la struttura labile nel caso delle forze); poichè la struttura sollecitata da distorsioni ha il suo modello limite in uno schema reso isostatico dal formarsi di snodi plastici, si può far riferimento ad esso per determinare un moltiplicatore degli enti applicati che valuti le risorse della struttura nei riguardi di questi ultimi. Così, per esempio, si potrà concretamente valutare la sensibilità alle variazioni termiche di taluni tipi strutturali intro-

ducendo il relativo coefficiente di sicurezza nel senso precedentemente rilevato; così anche per distorsioni causate dal ritiro o da cedimenti anelastici dei vincoli.

2. La ricerca del coefficiente s_D .

Il metodo che si propone si svolge nell'ambito delle ipotesi poste a base del « limit design »: si accetta quindi, per il materiale costituente la struttura, il diagramma tensioni-deformazioni di fig. 1 costituito dal tratto rettilineo O A, inclinato sull'asse delle ϵ di $\arctg E$ (comportamento idealmente elastico), e da un tratto rettilineo A B parallelo a tale asse e indefinito (comportamento idealmente plastico). Ritenendo inoltre valida l'i-

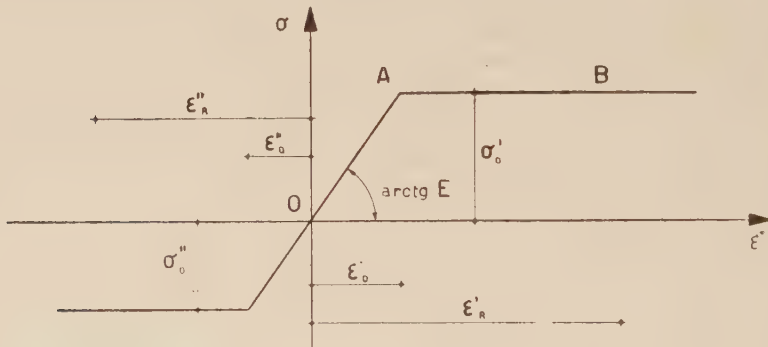


Fig. 1.

potesi che le sezioni si mantengano piane, il processo di plasticizzazione di un tronco elementare, sottoposto a due coppie M positive, può essere rappresentato attraverso i diagrammi tensionali indicati in fig. 2a, b, c. La relazione tra rotazione elementare e momento M è fornita (fig. 2d) dalla

$$(1) \quad d\varphi = \frac{M \, d x}{E \, I}$$

fino al valore del momento che produce la tensione limite σ_0 ad uno dei lembi:

$$M_s = \sigma_0'' \times W$$

determinando il diagramma tensionale di fig. 2a. Facendo aumentare il momento al di là di M_s , il diagramma delle σ si presenta come in fig. 2b con un tratto che varia ancora linearmente annullandosi in un punto C diverso da G. In questo stadio gli incrementi del momento flettente sono

accompagnati da una variazione $\Delta d\varphi$ della rotazione $d\varphi$ tra le due facce del tronco dx , fornita da:

$$(2) \quad \Delta d\varphi = \frac{\Delta M dx}{E I^*}$$

dove I^* è il momento di inerzia della sola parte della sezione che reagisce ancora elasticamente, rispetto al proprio asse baricentrico. Il diagramma

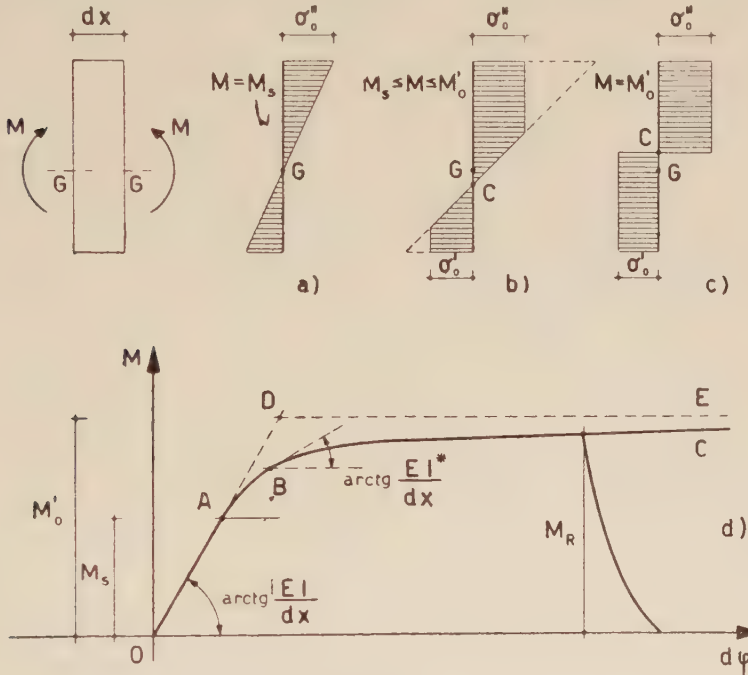


Fig. 2.

$M, d\varphi$ (fig. 2d) presenta quindi un primo tratto OA con variazione lineare espressa dalla (1) ed un secondo, curvilineo, ABC per valori di M compresi tra M_s ed M_0' ; l'inclinazione di questo secondo tratto è fornita per la (2) da $E I^*/dx$. In corrispondenza del massimo valore M_0' che M può attingere e per il quale il diagramma tensionate nella sezione è quello della fig. 2c, si ha $E I^*/dx = 0$ e $d\varphi = \infty$; quindi il diagramma $M, d\varphi$ ammette l'asintoto orizzontale $M = M_0' ^1$).

¹⁾ L'angolo $d\varphi$ è fornito da

$$d\varphi = \frac{\varepsilon dx}{h}$$

essendo ε la dilatazione in corrispondenza della fibra situata alla distanza h generica dall'asse neutro. Il diagramma delle ε (fig. 2b) è lineare per tutta l'altezza della sezione e, per la parte di questa che ancora si trova in campo elastico, affine al diagramma delle σ . Poichè per $M = M_0'$ in tutta la sezione è $\sigma = \sigma_0$ e quindi $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, comunque sia piccola h , è pure $d\varphi = \infty$.

Nel calcolo a rottura, con astrazione analoga a quella adottata per il diagramma σ, ϵ , si accetta il ramo indefinito BC della curva, prescindendo dalla possibilità di rottura delle fibre estreme ($\epsilon = \epsilon_R$), caratterizzata nel diagramma di fig. 2d dal rapido annullarsi del momento M_R ; inoltre si confonde il ramo BC della curva col suo asintoto sicchè ne risulta il diagramma ideale bilatero ODE. Queste ipotesi semplificative, sulle quali si basa il concetto di cerniera plastica, tornano particolarmente utili per il metodo che si propone poichè consentono di introdurre la relazione tra distorsioni di rottura e momenti limiti, necessaria per la determinazione del coefficiente s_D . Infatti, per tali ipotesi, il processo di plasticizzazione del tronco dx in corrispondenza della generica sezione, è assimilato ad un brusco passaggio (attraverso il punto D del diagramma ideale M, $d\varphi$) dal diagramma tensionale a) a quello birettangolo c) di fig. 2; si viene così a trascurare la fase elasto-plastica rappresentata dal tratto AC del diagramma M, $d\varphi$ e, relativamente allo stato tensionale della sezione, dal diagramma di fig. 1b): questo fatto comporta la validità della (1) per la generica sezione della struttura soggetta a distorsioni, fino a che queste assumono il valore cui corrisponde il raggiungimento del momento limite M_{0i} nella sezione stessa. Se in particolare la sezione che si considera è proprio quella in cui si localizza l'ultima delle cerniere plastiche, tra quelle necessarie a rendere la struttura isostatica, la (1) potrà ancora esprimere la curvatura in tale sezione per la struttura soggetta alle distorsioni $s_D \propto D_k$ che ne determinano il collasso nel senso precisato nella premessa.

La relazione che lega il moltiplicatore s_D con gli n momenti limiti si otterrà imponendo che, nella struttura divenuta una volta iperstatica per il formarsi di $n - 1$ cerniere plastiche, sia ancora rispettata la congruenza in corrispondenza della sezione che si plasticizza per ultima e nell'atto in cui si forma la relativa cerniera di snervamento. Per una struttura n volte iperstatica soggetta a distorsioni distribuite $\mu(s)$ di rotazione relativa e $\lambda(s)$ di allontanamento assiale relativo, si ha, utilizzando il principio dei lavori virtuali,

$$(3) \quad \int_s \frac{M'M}{EI} ds + \int_s \frac{N'N}{EA} ds - s_D \left[\int_s M' \mu(s) ds + \int_s N' \lambda(s) ds \right] = 0$$

dove

$$(4) \quad \begin{aligned} M &= M^{(0)} + M' \propto M_{0n} \\ N &= N^{(0)} + N' \propto M_{0n}. \end{aligned}$$

In queste ultime relazioni $M^{(0)}, N^{(0)}$ sono le caratteristiche nella struttura isostatica caricata con le coppie limiti in corrispondenza delle prime $n - 1$ cerniere, M', N' sono quelle che si hanno nella stessa struttura caricata

da una coppia unitaria in corrispondenza della n -esima cerniera ed M_{0n} il relativo momento limite. Se la prefissata posizione delle cerniere rispetta le condizioni di plasticità, dalla (3), tramite la (4), si ottiene il coefficiente di sicurezza

$$(5) \quad s_D = \frac{\int_s \frac{M' \bar{M}^{(0)}}{EI} ds + \int_s \frac{N' \bar{N}^{(0)}}{EA} ds + M_{0n} \left[\int_s \frac{M'^2}{EI} ds + \int_s \frac{N'^2}{EA} ds \right]}{\int_s M' \mu(s) ds + \int_s N' \lambda(s) ds}$$

3. La pratica del procedimento.

Si consideri la struttura di fig. 3a, soggetta ad un sistema di distorsioni D_k e si voglia determinare il relativo coefficiente di sicurezza. Essendo lo schema tre volte iperstatico occorre fissare un' arbitraria disposizione delle tre cerniere necessarie per ottenere lo schema isostatico cui si riduce la strut-

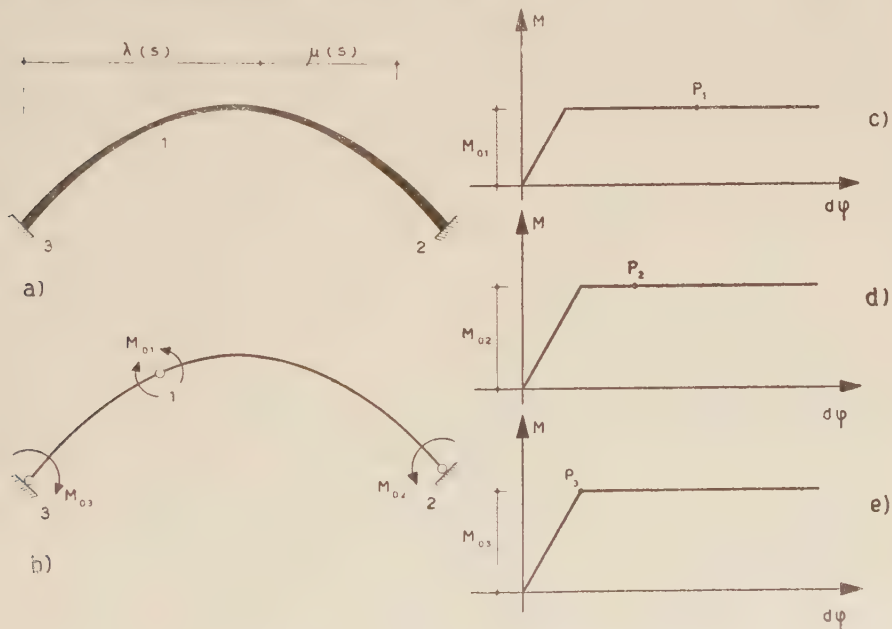


Fig. 3.

tura in collasso; è necessario inoltre fissare fra di esse quella che si suppone debba essere l' ultima a formarsi (nel caso in esame la sez. 3 dell' arco di fig. 3b). Se si prende in esame l' arco nell' atto in cui ciò avviene esso si presenta come una struttura una volta iperstatica, per la presenza di due sezioni completamente plasticizzate, con una terza sezione il cui stato tensionale è quello che immediatamente precede la fase puramente plastica:

il relativo punto rappresentativo nel diagramma M_3 , $d\varphi$ è P_3 (fig. 3e), mentre i punti P_1 e P_2 , relativi alle due sezioni che sono già avanti nel processo di deformazione plastica si trovano sul tratto orizzontale dei rispettivi diagrammi (fig. 3c, d). La relazione (1) è ancora valida per le sezioni appartenenti ai tronchi elastici della struttura compresi tra due cerniere plastiche consecutive; in particolare lo è, accettando le ipotesi poste, per la sezione 3 che è al limite del tratto elastico ideale $O P_3$ e per la quale è quindi possibile imporre le condizioni di congruenza attraverso la (3)²⁾. Si ottiene così un moltiplicatore s_D che può coincidere con il cercato coefficiente di sicurezza se la sezione in corrispondenza della quale si è scritta la (3) è quella in cui si localizza l'ultima cerniera plastica. Nella pratica applicazione del metodo occorrerà procedere per tentativi, poichè non si può garantire che sia unica la distribuzione di cerniere che rispetti le condizioni di plasticità; si ignora inoltre quale delle tre cerniere fissate è l'ultima a formarsi. Nell'iterare il procedimento, relativamente ad una prefissata distribuzione di cerniere, di quanto si è prima esposto cambia solo la sezione alla quale deve riferirsi la relazione (3). Si ottiene così una serie di valori s_D , il più piccolo dei quali è il richiesto coefficiente di sicurezza.

La scelta della ubicazione delle cerniere plastiche che rendono isostatica la struttura è condizionata, come nel procedimento usuale, relativo a strutture caricate da forze, dal rispetto delle condizioni di plasticità: quindi il diagramma dei momenti generati nella struttura isostatica dalle coppie M_{0i} , agenti in corrispondenza delle cerniere, deve essere tutto interno al diagramma dei momenti limiti. Costituisce una semplificazione non trascurabile del metodo il fatto che, non essendo la struttura caricata da forze incognite $s_F \times F_k$, il diagramma dei momenti della struttura in collasso dipende unicamente dalle coppie limiti e quindi dalla ubicazione delle cerniere plastiche; perciò la scelta della posizione di queste ultime può essere fatta in modo da rispettare le condizioni di plasticità, ancora prima della determinazione di s_D . Il verso delle coppie limiti che agiscono sulle facce collegate dalle cerniere deve essere fissato in modo che esse compiano lavoro negativo per le rotazioni relative impresse alla struttura resa isostatica dalle distorsioni assegnate.

Esempio. — Per il telaio di fig. 4 si ricerca il coefficiente di sicurezza relativo ad una variazione termica ad andamento lineare lungo l'altezza della sezione e che si annulla nel suo baricentro. La distorsione si considera estesa al solo traverso.

²⁾ Nel caso in esame la (3) vale ad esprimere che è nulla la rotazione della sezione 3 dell'arco di fig. 3a. reso isostatico, caricato dalle coppie limiti in corrispondenza delle sezioni collegate dalle cerniere e soggetto all'incognita distribuzione di distorsioni $s_D \times D_k$.

Con i simboli di figura si ha :

$$\Delta t_1 = 2 \Delta t = 30^0$$

$$M_{01} = 3 M_{02} = 45 \text{ tm}$$

$$\alpha = 10^{-5}$$

$$EI_1 = 4 EI_2 = 36 \times 10^3 \text{ tm}^2$$

$$l_1 = 2 l_2$$

$$h = 0.6 \text{ m.}$$

Per la simmetria della struttura e della distribuzione di distorsioni sono sufficienti tre cerniere per rendere isostatica la struttura. Per la stessa ragione è facilitata la scelta della loro posizione che dovrà essere simmetrica rispetto all'asse verticale passante per il ritto centrale; inoltre una qualsiasi disposizione delle cerniere A, A' in sezioni intermedie

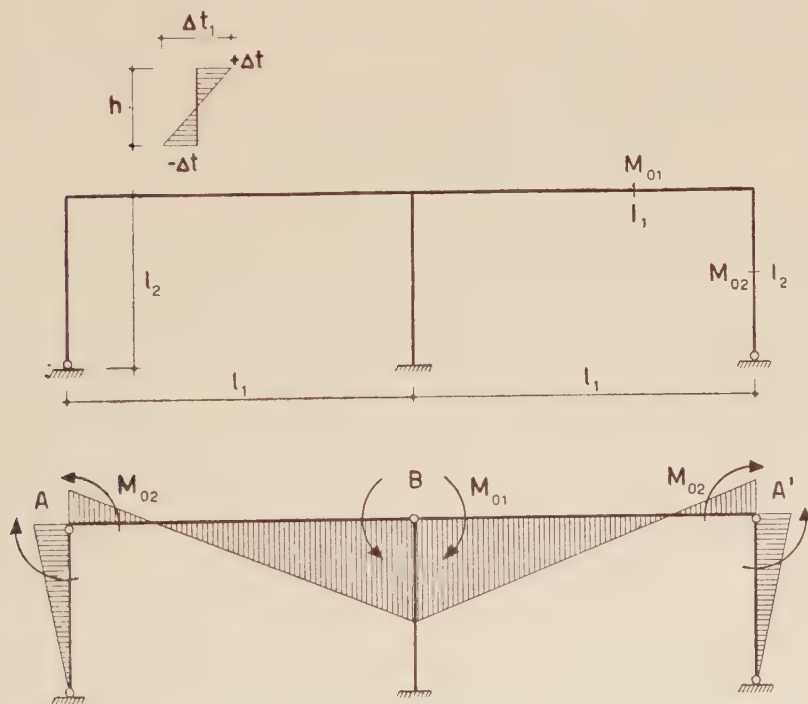


Fig. 4.

dei ritte di estremità o in qualsiasi sezione del traverso, ivi comprese quelle di estremità A ed A', comportano il superamento del momento limite nei ritte. E' facile vedere che l'unica disposizione di cerniere che rispetti le condizioni di plasticità è quella di fig. 4b; nella stessa figura è riportato il relativo diagramma dei momenti in fase di rottura.

Si supponga, in via di tentativo, che le cerniere A ed A', la comparsa

delle quali è contemporanea per ragioni di simmetria, si formino dopo quella in B. Con riferimento a metà struttura la (3) fornisce

$$\frac{l_1}{3EI_1} \left(\frac{M_{01}}{2} + M_{02} \right) + \frac{l_2}{3EI_2} M_{02} - s'_D \frac{\alpha \Delta t_1 l_1}{2h} = 0.$$

Un possibile coefficiente di sicurezza è quindi:

$$s'_D = \frac{11}{9} \frac{M_0}{EI_1} \frac{h}{\alpha \Delta t_1} = 3.055.$$

Se invece la (3) si scrive in corrispondenza della sezione B, supponendo quindi che in questo nodo si formi l'ultima cerniera, si ottiene:

$$\frac{l_1}{3EI_1} \left(M_{01} + \frac{M_{02}}{2} \right) - s''_D \frac{\alpha \Delta t_1 l_1}{2h} = 0.$$

Dalla precedente si ricava

$$s''_D = \frac{7}{9} \frac{M_{01}}{EI_1} \frac{h}{\alpha \Delta t_1} = 1.94$$

che, essendo minore del valore prima trovato, rappresenta il coefficiente di sicurezza della struttura. Questo poteva prevedersi, per il telaio in esame, poichè il momento limite in A e A' è minore di quello in B ed è quindi quest'ultima sezione quella in cui, per il naturale comportamento delle strutture in campo plastico, viene per ultimo superata la resistenza.

Napoli, Ist. di Scienza delle Costruzioni della Fac. d'Ingegneria, luglio 1958.

BIBLIOGRAFIA

1. H. J. GREENBERG - W. PRAGER. *Limit design of beams and frames*. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1951, n. 59, vol. 77.
2. V. FRANCIOSI. *La verifica a rottura nelle strutture da ponte*. Relazione al XLV Convegno Nazionale per il Progresso delle Scienze - Napoli.
3. V. FRANCIOSI. *Il teorema fondamentale del calcolo a rottura*. L'Ingegnere, 1955, N° 12, Roma.

SULLA CONCENTRAZIONE DEGLI ACIDI ASCORBICO E DEIDROASCORBICO
IN POLTIGLIE DI SEMI DI *Phaseolus vulgaris* POSTE AD INCUBARE :
INFLUENZA ESERCITATA DAI COSTITUENTI DEL COMPLESSO
RADICHETTA-PIUMETTA ¹⁾

Nota del socio Antonietta Orrù e dei dott. Franco Badolato e Teodoro De Leo

(pervenuta all'Accademia il dì 4 ottobre 1958)

Sunto -- Nelle poltiglie di semi di *Phaseolus vulgaris* o delle loro parti (particolarmente del cotiledone) messe ad imbibire o ad incubare, si ha un aumento della concentrazione dell'acido ascorbico, nonostante la distruzione per l'80 % dell'organizzazione cellulare.

Si è messa in evidenza un'interazione tra costituenti cotiledonari ed embrionali che influenza la determinazione dell'acido ascorbico.

Con esperienze precedenti [1] era stato messo in evidenza il variare della concentrazione degli acidi ascorbico (AH) e deidroascorbico (AD) in semi di *Phaseolus vulgaris* germinanti, e la loro ripartizione tra i cotiledoni ed il complesso radichetta-piumetta.

Si era così osservato come il valore dell'acido ascorbico totale, ottenuto dalla somma di quelli determinati separatamente sui cotiledoni e sul complesso radichetta-piumetta, superasse quello determinato direttamente sui semi in toto (i valori erano in ogni caso riferiti a 100 gr. di semi nelle condizioni naturali d'umidità).

Allo scopo di chiarire queste differenze sono state impostate le indagini che fanno oggetto della presente nota, eseguite utilizzando come materiale da cui estrarre l'acido ascorbico nelle due forme, le farine o le poltiglie ottenute dai semi in toto, dai soli cotiledoni o dal complesso radichetta-piumetta, poste ad incubare in opportune condizioni.

1° Gruppo di esperienze: — intese a stabilire se, facendo imbibire per 24 h a 30°C., in opportune condizioni, le farine ottenute (per triturazione con sabbia finissima in mortaio di porcellana fino alla rottura della maggior parte delle cellule, controllata al microscopio) dai semi in toto (privati del tegumento seminale), dai soli cotiledoni e dal solo complesso radichetta-piumetta, si potessero mettere in evidenza concentrazioni di

¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale, dell'Università di Napoli, col contributo del CNR.

acido ascorbico paragonabili a quelle ottenute da indentiche quantità degli stessi materiali messi ad imbibire *integri* per 24 h.

Per l'imbibizione delle farine si è proceduto seguendo la tecnica che verrà descritta successivamente (2° gruppo di esperienze).

I valori ottenuti da queste determinazioni, che sono sempre espressi in mgr. e riferiti a 100 gr. di semi interi secchi, si riportano nella tabella I.

TABELLA I
Determinazioni eseguite dopo 24h di imbibizione.

	Semi in toto		Cotiledoni		Complessi radichetta-piumetta	
	Integri	In farina	Integri	In farina	Integri	In farina
AT	11,03	12,48	14,70	18,10	0,94	1,16
AH	7,51	9,21	11,30	12,30	0,68	0,72
AD	3,52	3,27	3,40	5,80	0,26	0,44

I valori sono la media di almeno 3 determinazioni.

Da essi è possibile rilevare :

a) nelle farine si riscontrano *sempre* quantità di acido ascorbico totali maggiori di quelle presenti nei corrispondenti semi, o nelle loro parti, messi ad imbibire *integri* ;

b) nei cotiledoni, siano essi messi ad imbibire *integri* o sotto forma di farina, le quantità di acido ascorbico totale superano sempre quelle trovate nei semi o nelle farine di semi in toto, nelle stesse condizioni sperimentali.

2° Gruppo di esperienze: — intese a stabilire le variazioni delle concentrazioni di AH e AD in poltiglie ottenute da semi in toto (privi di tegumento seminale) dai soli cotiledoni e dai soli complessi radichetta-piumetta e poste ad incubare.

Per tale scopo si procedette come segue: i semi venivano messi ad imbibire per 24 h in acqua a 30°C., seguendo il sistema già indicato in una precedente nota [1].

Successivamente :

a) un certo numero di semi di peso iniziale noto, veniva ridotto in poltiglia, previo allontanamento del tegumento seminale, per triturazione con sabbia di quarzo in mortaio di porcellana fino a rottura delle cellule (il controllo al microscopio ha dato l'80-90 % di cellule rotte);

b) un altro gruppo di semi, di numero e peso iniziali noti, serviva per separarne i cotiledoni che si riducevano in poltiglia come sopra ;

c) un terzo gruppo, anch'esso di numero e peso iniziale noto. serviva per separarne i complessi radichetta-piumetta che anch'essi, col solito sistema, venivano ridotti in poltiglia.

Le poltiglie così ottenute si mettevano ad incubare entro ditali di carta pressata, posti in germinatoi in camera calda a 30°C ed 80% di umidità.

Questo dispositivo si rese necessario sia per mantenerle al grado di umidità opportuno, e identico a quello adatto per la germinazione, già utilizzato in precedenti esperienze [1], sia per evitare il contatto con l'aria, onde impedire o rendere minime, le perdite per soluzione o processi di ossidazione dell'acido ascorbico.

Numerose aliquote di poltiglie delle tre serie, vennero così preparate in singoli ditali di carta pressata.

Periodicamente per ogni serie, fino ad un massimo di 96 h, si prelevava un ditale e del suo contenuto totale si faceva l'estrazione con acido tricloroacetico e la determinazione dell'AH e dell'AD secondo il metodo già indicato [1].

I valori dell'acido ascorbico così ottenuti vengono espressi in mgr. e si riferiscono a 100 gr. di semi interi nelle condizioni naturali di umidità. (Per i cotiledoni e per il complesso radichetta-piumetta si riferiscono alla quantità di essi presenti in 100 gr. di semi interi.)

I risultati, che sono la media di almeno tre determinazioni, sono riportati nella tabella II e nel grafico n. 1.

Essi si possono così riassumere:

a) i valori di AH, anche in queste condizioni, sono sempre superiori ai valori di AD e ciò ci assicura che con la tecnica sperimentale adottata si è evitata, o almeno molto ridotta, l'ossidazione dell'AH presente come tale.

b) poltiglie di semi in toto: l'AH aumenta col progredire dell'incubazione per tutta la durata dell'esperimento (96 h); l'AD invece, presenta un aumento fino alle 48 h, poi diminuisce (graf. n. 1A);

c) poltiglie di soli cotiledoni: la quantità di AH aumenta gradualmente e considerevolmente col progredire della durata della incubazione, fino a 96 h; la concentrazione dell'AD che è invece bassa e si mantiene costante all'inizio, tende poi a diminuire (graf. n. 1B);

d) poltiglie ottenute dai soli complessi radichetta-piumetta: bassissima si mantiene in tutte le fasi dell'incubazione la concentrazione dell'AH e dell'AD (il massimo raggiunto dell'AH è infatti di mgr. 1,05 e quello dell'AD di mgr. 0,67 per 100 gr. di semi (grafico n. 1C)).

I valori dell'AH per le poltiglie di soli cotiledoni, superano sempre, anche in queste condizioni, quelle delle poltiglie di semi interi. I valori di AD tendono invece a mantenersi più bassi. I valori dell'AT e dell'AH ottenuti dalla somma di quelli presenti rispettivamente nei cotiledoni e nel complesso radichetta-piumetta, e derivanti da 100 gr. di semi secchi,

TABELLA II

Esperienze eseguite incubando poltiglie ottenute tritutando semi in toto (senza tegumento seminale), soli cotiledoni o soli complessi radichetta-piumetta da essi separati dopo 24 h di imbibizione.

Poltiglie	Dopo 24 h di imbibizione	Durata dell' incubazione			
		24 h	48 h	72 h	96 h
Poltiglie di semi in toto AT AH AD	12,48 9,21 3,27	17,65 13,10 4,55	26,29 16,42 9,87	28,55 20,74 7,81	29,11 21,06 5,05
Poltiglie di soli cotiledoni A)	18,10 12,30 5,80	21,94 17,54 4,40	30,48 25,55 4,93	35,66 31,76 3,90	36,53 34,83 1,70
Poltiglie di soli complessi radichetta-piumetta B)	1,16 0,72 0,44	1,82 1,05 0,77	1,38 1,18 0,20	1,48 1,37 0,11	1,24 1,06 0,18
Valori (A+B) AT AH AD	19,26 14,02 6,24	23,76 18,59 5,17	31,86 26,73 5,13	37,14 33,13 4,01	37,77 35,89 1,88

I valori si riferiscono in mg/100 g. di semi interi nelle condizioni naturali di umidità. Essi sono sempre la media di almeno tre determinazioni.

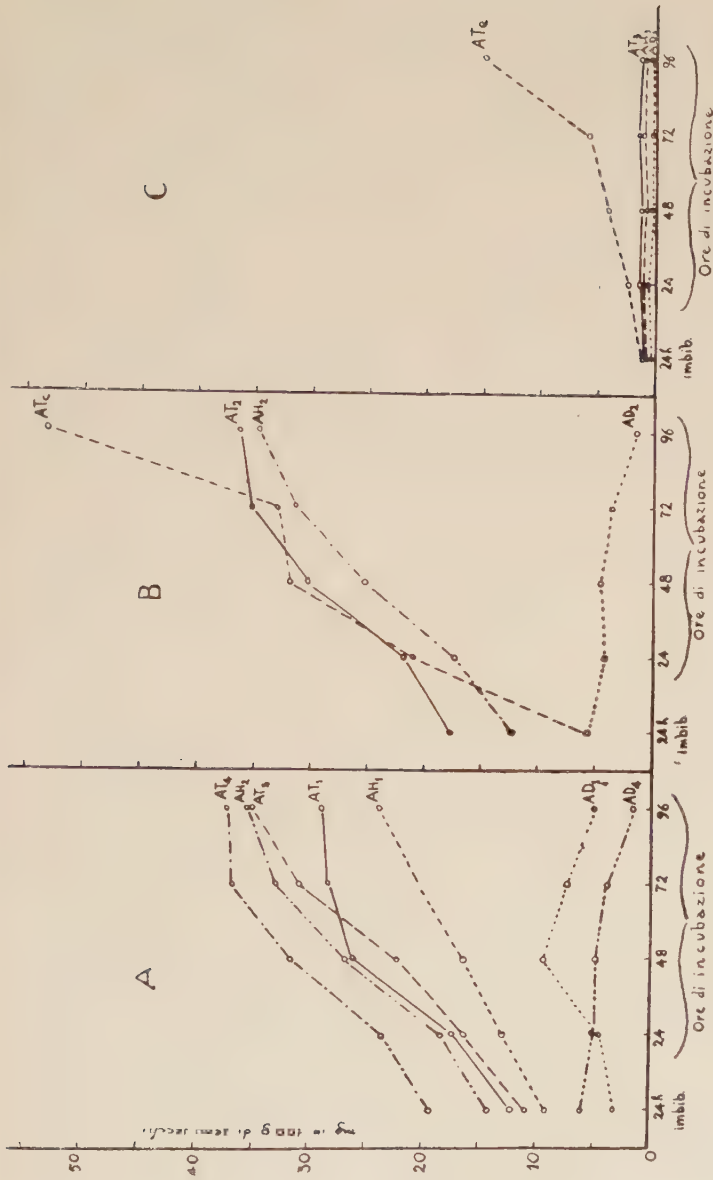


GRAFICO n. 1 — Concentrazione di AT , AH , e AD in funzione del tempo di incubazione.

A = in poltiglie di semi in toto (AT_1 , AH_1 , AD_1)

B = in poltiglie di cotiledoni (AT_2 , AH_2 , AD_2)

C = in poltiglie di complessi radichetta-piumetta (AT_3 , AH_3 , AD_3)

AT_4 , AH_4 , AD_4 = valori ottenuti dalla somma rispettivamente in quelli in A e B

AT_s = AT determinato nei semi in toto germoglianti

AT_c = AT determinato nei cotiledoni, separati dai semi germoglianti nel momento della determinazione.

AT_c = AT determinato nel complesso radichetta-piumetta separato dai semi germoglianti al momento della determinazione.

Ordinate = mgr. di acido ascorbico riferiti a 100 gr. di semi nelle condizioni naturali di umidità.

Ascisse = tempo in ore

sono a maggior ragione, più elevati di quelli determinati sulla poltiglia di semi in toto (vedi graf. n. 2A); i valori dell'AD calcolati allo stesso modo, all'inizio dell'incubazione sono superiori, ma vanno diminuendo, e diventano inferiori dopo 96h (graf. n. 1A).

f) un confronto tra i valori determinati sulla poltiglia in questione, e quelli determinati su semi posti ad incubare integri o sui cotiledoni o sui complessi radichetta-piumetta separati dai semi germoglianti al momento della determinazione, (questi valori già riferiti nella tab. I in una nota precedente [1] sono riportati sul grafico n. 1) ci permette di dedurre:

1) l'acido ascorbico totale nei semi in toto, posti ad incubare integri, si trova in quantità che sono di poco inferiori a quelle trovate nelle poltiglie di semi in toto fino alle 60 h di esperimento, ma successivamente, si ha una produzione maggiore;

2) un fenomeno analogo si osserva per l'AT dei cotiledoni;

3) per il complesso radichetta-piumetta si ha, invece, una considerevole differenza: i valori dell'AT, quando il complesso radichetta-piumetta deriva dal seme germogliante integro, vanno costantemente aumentando e raggiungono quantità ragguardevoli a 96 h di incubazione, mentre si mantengono costantemente molto bassi nelle poltiglie del complesso radichetta-piumetta.

3^o Gruppo di esperienze: — intese a mettere in evidenza l'influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta sul contenuto in acido ascorbico dei cotiledoni, quando si fanno variare i rapporti reciproci di queste due parti del seme.

Si istituirono due serie di esperienze:

A) Da diversi gruppi di semi, ognuno costituito da 60 semi, si separarono dopo 24 h di imbibizione, i cotiledoni (a), dai complessi radichetta-piumetta (b), che ridotti in poltiglia, vennero posti separatamente ad incubare per 48 h in germinatoi, nelle condizioni già descritte nel secondo gruppo di esperienze.

Al termine del periodo d'incubazione, si eseguì nel modo consueto l'estrazione e la determinazione dell'acido ascorbico sulle poltiglie derivanti dai soli cotiledoni, su quelle derivanti dal solo complesso radichetta-piumetta e su quelle ottenute dopo aver mescolato prima dell'estrazione, le poltiglie di cotiledoni con quelle ottenute dal complesso radichetta-piumetta (derivanti in ogni caso da 60 semi). I risultati di questa esperienza sono riportati nella tab. III ove i valori di acido ascorbico totale, ridotto ed ossidato ad acido deidroascorbico, sono espressi in mgr. e riferiti sia ai 60 semi di partenza, sia a 100 gr. di semi nelle condizioni naturali di umidità.

TABELLA III
Valori medi espressi in mg.

Parti del seme in poltiglia	Su 60 semi di g. 32,22	% grammi di semi nelle condizioni naturali di umidità
Cotiledoni		
(a)		
AT	6,10	19,05
AH	4,05	12,60
AD	2,10	6,35
Complesso radichetta- piumetta		
(b)		
AT	0,47	1,47
AH	0,40	1,24
AD	0,07	0,23
Cotiledoni+ complesso radichetta- piumetta		
(determ.)		
AT	5,12	15,80
AH	2,54	7,84
AD	2,58	8,00
Cotiledoni (a)+ complesso radichetta- piumetta (b)		
(teorico)		
AT	6,57	20,47
AH	4,45	13,84
AD	2,17	6,53

I valori sono sempre la media di almeno 3 determinazioni.

Da essi si rileva che la semplice mescolanza di poltiglie di cotiledoni e di poltiglie del complesso radichetta-piumetta al momento dell'estrazione, porta ad una diminuzione dell'attività riducente che dovrebbe, in teoria, date le particolari condizioni in cui ci siamo messi, essere eguale alla somma dei valori ottenuti dai cotiledoni (a) e dal complesso radichetta-piumetta (b).

B) Per poter eseguire questa seconda serie di esperienze si son dovuti stabilire innanzi tutto i rapporti ponderali esistenti tra cotiledoni e complesso radichetta-piumetta. Tale indagine, eseguita su un numero rilevante di semi, ha dato come rapporto cotiledoni/complesso radichetta-piumetta = 100 : 0,472.

A gruppi diversi di determinato ed egual numero di semi (di cui era noto il peso) venne asportato accuratamente il complesso radichetta-piumetta con la punta di un bisturi. I gruppi di semi privi del complesso radichetta-piumetta, così ottenuti, col tegumento seminale intaccato il meno possibile, furono posti ad imbibire in acqua per 24h a 30°C.

Contemporaneamente fu asportato il complesso radichetta-piumetta da gruppi di semi di numero eguale, doppio, triplo, quadruplo di quello dei

semi su indicati ed anche questi diversi gruppi, formati dal solo complesso radichetta-piumetta furono posti ad imbibire per 24 h in acqua nelle stesse condizioni.

Allo scadere delle 24 h da ogni gruppo di semi privi del complesso radichetta-piumetta si allontanò il tegumento seminale, ed i cotiledoni vennero triturati in mortaio di porcellana con polvere di quarzo fino a quasi completo disfacimento cellulare. Ad ogni gruppo si aggiunsero i complessi radichetta-piumetta (anche essi imbibiti per 24 h a 30°C e ben triturati), in proporzioni tali da ottenere poltiglie in cui il rapporto complesso radichetta-piumetta/cotiledoni fosse pari a quello esistente nel seme (considerato 1 : 1) o doppio (considerato 2 : 1) o triplo (considerato 3 : 1), o quadruplo (considerato 4 : 1).

Le varie poltiglie delle miscele così ottenute furono poste in ditali di carta da filtro pressata, indi introdotte in camera termostatica a 30°C con grado di umidità dell'80 %, entro germinatoi con la stessa tecnica seguita nel secondo gruppo di esperienze.

Si prepararono così quattro serie di esperienze ; il prelievo dei vari campioni fu fatto per ogni serie ad intervalli regolari di 24 h fino a 72 h di incubazione.

Su ogni campione l'estrazione e la determinazione dell'acido ascorbico si eseguirono nel modo consueto. I valori così ottenuti si riportano nella tabella IV dove sono espressi in mgr. per 100 gr. di semi allo stato di umidità naturale.

Nella tabella V si riportano i valori dell'acido ascorbico totale e dei rapporti AD/AH *determinati* sulle varie poltiglie, accanto ai valori teorici degli stessi rapporti che è possibile *ricavare per calcolo*.

Gli stessi valori *calcolati* sono riportati nel grafico n. 2 accanto a quelli ottenuti dalla *determinazione*.

Dai risultati è possibile osservare per ciò che riguarda l'*AT*:

a) qualunque sia la proporzione di poltiglia derivante dal complesso radichetta-piumetta, posta ad incubare assieme alla poltiglia di soli cotiledoni, i valori di *AT determinati* sulla miscela sono sempre inferiori a quelli *calcolati* per miscele con rapporti equivalenti; essi sono anche inferiori o al massimo uguali (nel rapporto 4 : 1) ai valori di *AT* delle poltiglie di soli cotiledoni. Il grafico n. 2 (sezione I) rileva chiaramente questo comportamento.

Per quel che riguarda il rapporto AD/AH si può osservare:

a) i valori dopo 24 h di imbibizione e nelle 24 h di incubazione a 30°C. sono sempre superiori per le poltiglie del complesso radichetta-piumetta, ma, si abbassano rapidamente dopo questo periodo;

b) i valori per le poltiglie provenienti dai soli cotiledoni, e quelli ricavati dal calcolo per le miscele con proporzioni varie di complessi radichetta-piumetta, non solo presentano lo stesso andamento in continua

TABELLA IV

Periodo di tempo considerato	Soli cotiledoni (a)	Soli complessi radichetta-piumetta (b)	Miscela di complessi radichetta-piumetta (b) + cotiledoni (a) nei rapporti:			
			1b : 1a	2b : 1a	3b : 1a	4b : 1a
Dopo 24h di imbibizione	AT	1,16				
	AH	0,72				
	AD	0,44				
Dopo 24h di incubazione a 30° C	AT	1,82	14,05	17,00	19,81	22,99
	AH	1,05	11,39	14,91	16,11	18,70
	AD	0,77	2,66	2,09	3,70	4,29
Dopo 48h di incubazione a 30° C	AT	1,38	17,58	22,25	24,78	30,38
	AH	1,18	14,23	18,16	20,11	23,16
	AD	0,20	3,35	4,09	4,77	7,22
Dopo 72h di incubazione a 30° C	AT	1,48	20,56	23,20	27,96	34,24
	AH	1,37	16,49	19,10	21,58	26,06
	AD	0,11	4,07	4,10	6,48	8,18

I valori sopra riportati sono espressi in mg. I primi (a e b) si riferiscono a 100 g. di semi nelle condizioni naturali di umidità.

TABELLA V

Periodo di tempo considerato	Poltiglia di soli cotiledoni (a)	Poltiglia di soli complessi radichetta-piumetta (b)	Poltiglia di cotiledoni (a) + poltiglia di complessi radichetta-piumetta (b) nei rapporti:		
			1a : 1b	1a : 2b	1a : 3b
Dopo 24h di imbibizione	AT = 18,10	AT = 1,16	AT » (a+b) = 19,26	AT » (a+2b) = 20,42	AT » (a+3b) = 21,58
Dopo 24h di incubazione a 30°C	AT = 21,94	AT = 1,82	AT » (a+b) = 23,76	AT » (a+2b) = 25,56	AT » (a+3b) = 27,40
Dopo 48h di incubazione a 30°C	AT = 30,48	AT = 1,38	AT » (a+b) = 31,86	AT » (a+2b) = 33,24	AT » (a+3b) = 34,62
Dopo 72h di incubazione a 30°C	AT = 35,66	AT = 1,48	AT » (a+b) = 37,14	AT » (a+2b) = 38,62	AT » (a+3b) = 40,10
Dopo 24h di imbibizione	AD/AH = 0,47	AD/AH = 0,61	AD/AH » (a+b) = 0,47	AD/AH » (a+2b) = 0,48	AD/AH » (a+3b) = 0,49
Dopo 24h di incubazione a 30°C	AD/AH = 0,25	AD/AH = 0,73	AD/AH » (a+b) = 0,27	AD/AH » (a+2b) = 0,30	AD/AH » (a+3b) = 0,32
Dopo 48h di incubazione a 30°C	AD/AH = 0,17	AD/AH = 0,16	AD/AH » (a+b) = 0,19	AD/AH » (a+2b) = 0,19	AD/AH » (a+3b) = 0,19
Dopo 72h di incubazione a 30°C	AD/AH = 0,12	AD/AH = 0,08	AD/AH » (a+b) = 0,12	AD/AH » (a+2b) = 0,11	AD/AH » (a+3b) = 0,11

I valori dell'acido ascorbico in mg. si riferiscono sia in (a) che in (b) a quello presente nei cotiledoni o nei complessi radichetta-piumetta contenuti in 100 g. di semi interi, nelle condizioni naturali di umidità. Essi sono sempre la media di tre determinazioni.

I valori (a+b) per il rapporto AD/AH, sono stati ricavati dai valori che si riferiscono alla determinazione nei cotiledoni e nei complessi radichetta-piumetta, riportati nella tabella IV.

I valori in corsivo sono stati calcolati.

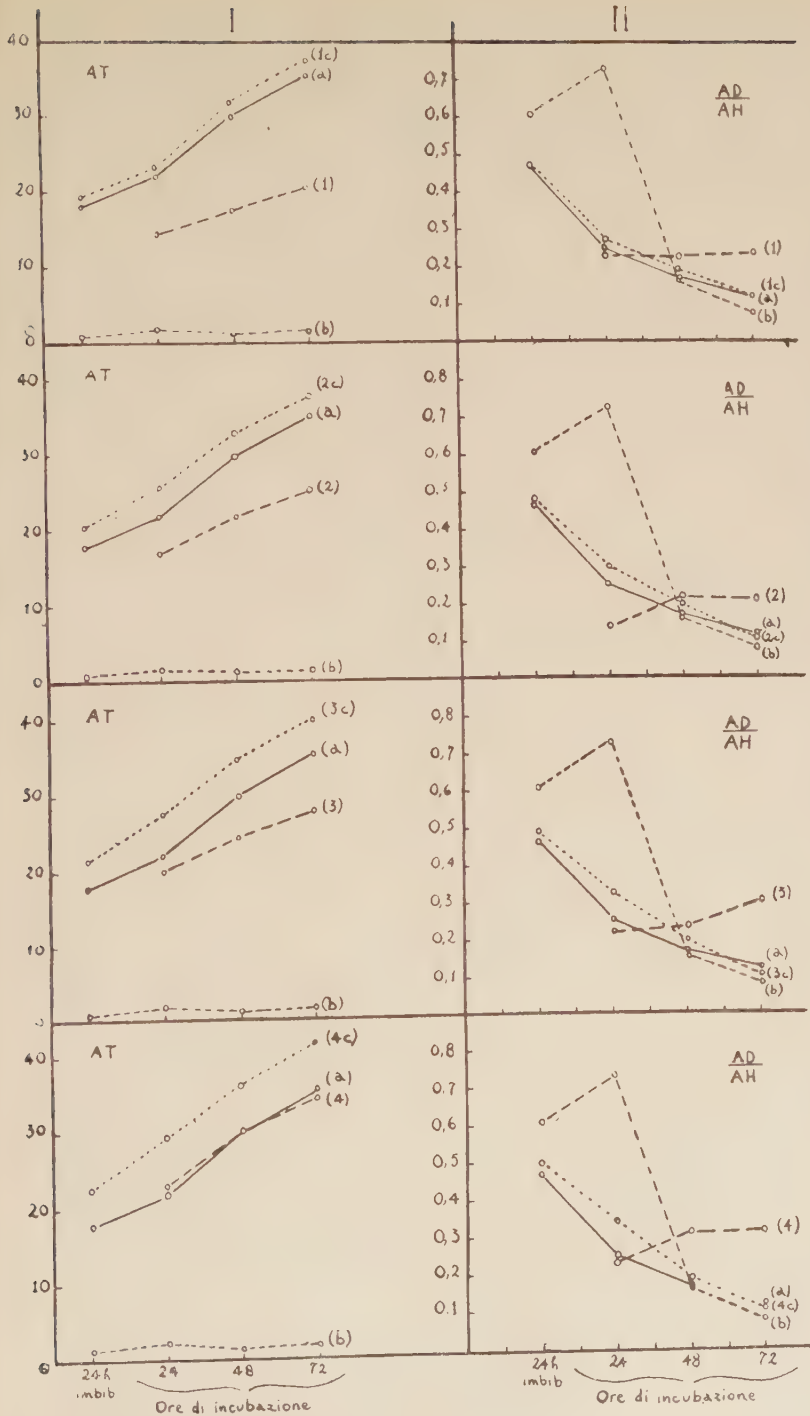


GRAFICO n. 2 — a = soli cotiledoni; b = soli complessi radichetta-piumetta

3 = poltiglie nei rapporti 1a : 3b, valore determinato
 3c = poltiglie nei rapporti 1a : 3b, valore calcolato da a + 3b
 4 = poltiglie nei rapporti 1a : 4b, valore determinato
 4c = poltiglie nei rapporti 1a : 4b, valore calcolato da a + 4b

Ascisse = ore di incubazione
 Ordinate = mgr. di AT (sezione I) o valori del rapporto $\frac{AD}{AH}$ (sezione II) in 100 gr. di semi.

diminuizione col progredire dell' incubazione, ma sono anche fra loro poco differenti (graf. n. 2, tab. V).

Nella realtà invece, i valori *determinati* sulle miscele contenenti porzioni crescenti del complesso radichetta-piumetta, indicano un aumento del rapporto AD/AH che é maggiore per maggior porzioni di complesso radichetta-piumetta (curve 1, 2, 3 e 4 del graf. n. 2 sez. II).

Conclusioni.

L' insieme delle esperienze su riportate permette di dedurre le seguenti conclusioni :

a) la sintesi dell' acido ascorbico si *manifesta* già dopo 24 h di imbibizione non soltanto nei semi in toto, nei cotiledoni e nel complesso radichetta-piumetta messi ad imbibire integri [1] ma anche, in eguali condizioni sperimentali, nella farine da essi rispettivamente ottenuti per triturazione con sabbia finissima di quarzo tale da portare al disfacimento di almeno l' 80 % delle cellule. (Nei complessi radichetta-piumetta la quantità di acido ascorbico determinata risulta però sempre molto bassa).

La sintesi appare sempre più cospicua nelle farine che nel materiale da cui esse provengono (tab. I). E' evidente che la lesione delle cellule porta più rapidamente a contatto gli enzimi ed il substrato deputati a tale sintesi, e da ciò la maggior velocità di sintesi dell'acido ascorbico.

Si conferma quanto già osservato da POVOLOCKAJA [2] e ROBERTSON [3] cioè che i processi responsabili per la sintesi, almeno in maniera preponderante, avvengono nel cotiledone e comunque non dipendono dalla presenza ed accrescimento del complesso radichetta-piumetta. Il ROBERTSON che ha eseguito determinazioni su cotiledoni frantumati, afferma che, perchè la sintesi avvenga è necessario siano presenti nella polvere cellule intatte nella maggior proporzione possibile. Questa affermazione non può essere confermata dalle nostre esperienze; infatti l'osservazione microscopica delle farine o delle poltiglie ottenute tritutando i semi o le loro parti con finissima sabbia di quarzo, ha mostrato che per l' 80 % l'organizzazione cellulare viene distrutta, e tuttavia la formazione di acido ascorbico appare più copiosa.

I valori di AH dopo 24 h di imbibizione sono sempre superiori a quelli di AD (come osservato anche in esperienze precedenti, in contrasto con quanto trovato sui piselli da ROBERTSON), e la quantità di acido ascorbico (AT, AH, AD) trovata nelle farine derivanti dai cotiledoni supera sempre quella trovata nelle farine provenienti dai semi in toto.

b) *Incubando sino a 96 h* (in germinatoi posti in camera calda a 30°C. e 80 % di umidità, con particolari dispositivi sperimentali) poltiglie ottenute tritutando con sabbia di quarzo, semi in toto, soli cotiledoni o soli complessi radichetta-piumetta (separati dopo 24 h di imbibizione dai

semi) si osserva un aumento di concentrazione di AT e AH nei primi due casi; i valori si mantengono invece estremamente bassi nelle poltiglie di complessi radichetta-piumetta. L'aumento più notevole si ha *sempre* nelle poltiglie di soli cotiledoni.

I valori dell'AD risultano invece piuttosto bassi e ad accezione delle poltiglie di semi in toto (in cui si osserva un certo aumento fino alle 48 h), vanno diminuendo continuamente.

La sintesi dell'acido ascorbico, superate le 48 h di incubazione, è però nelle poltiglie meno cospicua di quella che si manifesta nelle rispettive parti del seme poste a germinare in condizioni normali (vedi graf. n. 1 in cui i valori ATs, ATe, ATe, sono ricavati da una nota precedente [1], e sono confrontabili perchè ottenuti sulla stessa partita di semi in identiche condizioni sperimentali).

Queste differenze si manifestano in particolare per il complesso radichetta-piumetta (vedi ATe graf. n. 1C).

E' evidente da queste esperienze (a conferma di quanto osservato nelle precedenti) l'influenza esercitata da qualche costituente embrionale, rivelabile allorchè si considerano i valori di AT dei semi in toto o delle poltiglie da essi ricavati, nei confronti di quelli, ottenuti rispettivamente per i soli cotiledoni e per le loro poltiglie.

Poichè come già dimostrato [1] la concentrazione dell'acido ascorbico nel complesso radichetta-piumetta quando questo si sviluppa nel seme integro è piuttosto elevata e va aumentando con il suo sviluppo, e poichè d'altra parte la somma dei valori di AT nei cotiledoni e nel complesso radichetta-piumetta separato al momento della determinazione supera sempre notevolmente il valore di AT direttamente ottenuto nelle determinazioni sui semi in toto (in condizioni perfettamente paragonabili) si deve ritenere che l'azione esercitata dal complesso radichetta-piumetta non sia un'azione limitante la produzione di acido ascorbico da parte del cotiledone (come dice il ROBERTSON in contrasto con quanto già rilevammo in una nota precedente).

Le esperienze del 3° gruppo (serie A) i cui risultati sono riportati nella tab. III, mostrano infatti chiaramente che la determinazione di AT, AH, AD, compiuta su poltiglie di cotiledoni e di complessi radichetta-piumetta proveniente da un determinato numero di semi, danno, per incubazione di 48 h dei valori la cui somma è sempre superiore al valore ottenuto se le poltiglie di cotiledoni e di complessi radichetta-piumetta, proveniente da un egual numero di semi, si mescolano prima della determinazione.

c) *Le esperienze del 3° gruppo* confermano ancora l'influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta sulla quantità di acido ascorbico determinata.

L'acido ascorbico determinato infatti in poltiglie costituite da me-

scolanze, in proporzioni variabili di cotiledoni e complessi radichetta-piumetta, poste ad incubare, è sempre inferiore a *quello calcolato* per miscele di proporzioni corrispondenti, e quale si dovrebbe avere se non avvenissero interazioni tra costituenti cotiledonari ed embrionali messi a diretto contatto.

L'azione esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta non appare direttamente proporzionale alla loro quantità.

I valori del rapporto $\frac{AD}{AH}$, ricavati dalle determinazioni effettuate sulle varie poltiglie (tab. II) dopo diversi periodi d'incubazione, differiscono sensibilmente, non soltanto per i valori assoluti, ma anche per il loro andamento, da quelli che teoricamente ci si doveva attendere, in assenza di specifiche interazioni tra costituenti del complesso radichetta-piumetta e costituenti del cotiledone.

Infatti mentre questi ultimi valori diminuiscono col procedere dei giorni di incubazione, seguendo un andamento molto vicino a quello mostrato dalle poltiglie di soli cotiledoni, quelli ricavati dalle determinazioni, pur essendo in partenza più bassi dei primi, mostrano *in ogni caso* una tendenza all'aumento che è più spiccata per quantità maggiori dei complessi radichetta-piumetta (grafico n. 2 - sez. II).

Questa osservazione, assieme al più alto valore presentato dal rapporto $\frac{AD}{AH}$ per i primi periodi d'incubazione dei soli complessi radichetta-piumetta, rivela che in seno a queste poltiglie i processi tendenti a far avvenire la reazione $AH \rightarrow AD$ sono in aumento, ed è lecito pensare che specialmente nel complesso radichetta-piumetta si devono trovare i sistemi enzimatici a ciò deputati.

ROBERTSON (3) determinando l'ascorbicossidasi nei semi di pisello interi germinanti riferisce che «non è riuscito a dimostrare nessun notevole cambiamento da un giorno all'altro, ma che vi è tendenza, tuttavia, ad elevate concentrazioni durante le prime 48 h, e quindi una progressiva diminuzione fin dopo il quinto giorno. In tal modo le concentrazioni dell'ascorbicossidasi tenderebbero a seguire quelle dell'acido ascorbico».

Date le diverse condizioni sperimentali non è possibile attendersi da questi risultati una conferma o meno alle nostre precedenti osservazioni.

Ulteriori indagini in corso di allestimento ci permetteranno di mettere in luce il meccanismo o i meccanismi dell'interazione esercitata dai costituenti embrionali e cotiledonari durante le fasi dello sviluppo del seme.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ORRÙ A., BADOLATO F., QUAGLIARIELLO A. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., 4^a, 25. Napoli (1958).
- [2] POVOLOCKJA K. L. C. R. Ac. Sci. U.R.S.S., 18, 1 (1937).
- [3] BRAILSFORD ROBERTSON T. S. Aust. J. of Exper. Biol. and Med. Sci., 25, 41 (1947).

UN ULTERIORE CASO DI NON VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DELL' EFFETTO GIROSCOPICO

Nota del dott. Salvatore Rionero, presentata dal socio Carlo Tolotti

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. — Si prova che l'equazione del principio dell' effetto giroscopico può non approssimare la posizione di un solido S con un punto fisso su cui agiscono forze dipendenti dall'angolo di rotazione propria di S .

1. Sia S un solido con un punto fisso O e $T(x, y, z)$ una terna principale d'inerzia per O di versori i, j, k . Siano A, B, C i momenti d'inerzia di S rispetto ad x, y, z ordinatamente e z sia un asse di rotazione permanentemente stabile. Ad S sia stata impressa una fortissima rotazione iniziale $\omega_0 = p_0 i + q_0 j + r_0 k$ con p_0 e q_0 infinitesimi dello stesso ordine (almeno) di $\frac{1}{r_0}$ e sia M il momento rispetto ad O delle forze che sollecitano S .

In un precedente lavoro ¹⁾ ho provato che l'equazione del principio dell' effetto giroscopico

$$(1) \quad C r_0 \frac{dk}{dt} = M$$

quando il momento M è del tipo

$$(2) \quad M = k \wedge F$$

con F dipendente dall'angolo φ di rotazione propria di S , può non approssimare la posizione di S .

Tale circostanza è stata da me provata considerando un esempio riguardante il caso sferico ($A = B = C$). Poichè, come ho avuto occasione di illustrare in un mio recente lavoro ²⁾, il caso sferico, come il caso piano ($C = A + B$) ³⁾, è un caso limite in cui non continuano a sussistere

¹⁾ S. RIONERO, *Sul principio dell' effetto giroscopico*, Ricerche di Matematica, vol. VII (1958) pagg. 14-20.

²⁾ S. RIONERO, *Sul principio dell' effetto giroscopico nel caso sferico* — in corso di stampa in Ricerche di Matematica.

³⁾ D. QUILGHINI, *Sul principio dell' effetto giroscopico*. Ricerche di Matematica, vol. VII, pagg. 205-231.

tutti i risultati sul principio dell'effetto giroscopico stabiliti dallo STOPPELLI ⁴⁾, ho pensato che avesse interesse il riprendere l'esempio da me riportato nel mio primo lavoro cercando di adattarlo ad un caso che non rientrasse nè in quello sferico nè in quello piano.

Precisamente l'esempio da me considerato nel presente lavoro e per cui dimostro la non validità della (1), riguarda un giroscopio soggetto ad un particolare tipo di forza dipendente da φ . Resta così tolto il dubbio che l'essenzialità dell'indipendenza della F da φ , ai fini della validità del principio dell'effetto giroscopico, potesse dipendere dalla particolare forma del solido S considerato nel mio precedente lavoro.

2. In questa nota, oltre alle notazioni già introdotte, indicheremo con: $T'(\xi, \eta, \zeta)$ una terna fissa di origine O ;

ω il vettore della velocità angolare della terna solidale T rispetto a T' e con p, q, r le componenti di ω su x, y, z rispettivamente;

Θ, ϕ, φ gli angoli di nutazione, precessione e rotazione propria di T rispetto a T' ;

M_x, M_y, M_z le componenti del momento M su x, y, z rispettivamente.

Posto:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{C-B}{A}, \quad b = \frac{C-A}{B}, \quad c = \frac{A-B}{C} \\ f(t) = \frac{M_x}{A}, \quad g(t) = \frac{M_y}{B}, \quad h(t) = \frac{M_z}{C} \end{array} \right.$$

le equazioni differenziali del moto di S nella forma di EULERO, si possono scrivere:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} + a r q = f(t) \\ \dot{q} - b r p = g(t) \\ \dot{r} - c p q = h(t) \\ \dot{\Theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\phi} = \frac{1}{\sin \Theta} (p \sin \varphi - q \cos \varphi) \\ \dot{\varphi} = r - \cot \Theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi). \end{array} \right.$$

⁴⁾ F. STOPPELLI, *Sul principio dell'effetto giroscopico*. Giornale di Matematica di Battaglini, serie IV, vol. LXXX, 1950-51, pagg. 14-38.

F. STOPPELLI, *Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi*. Rend. del Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. XXI, pagg. 25-43.

Nell'ipotesi essenziale che sia

$$(5) \quad a b > 0$$

cioè che l'asse z sia l'asse principale d'inerzia cui spetti momento d'inerzia minimo o massimo, e quindi nell'ipotesi che z sia asse di rotazione permanente stabile, si prova che ⁵⁾ la soluzione del sistema (4) determinata dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} p(0) = p_0, & q(0) = q_0, & r(0) = r_0 \\ \Theta(0) = \Theta_0, & \psi(0) = \psi_0, & \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

è anche soluzione del sistema di equazioni funzionali

$$(6) \quad \begin{cases} p = p_0 \cos \sqrt{ab} r_t^* - \sqrt{\frac{a}{b}} q_0 \sin \sqrt{ab} r_t^* + \\ + \int_0^t f(\tau) \cos \sqrt{ab} (r_t^* - r_\tau^*) d\tau - \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^t g(\tau) \sin \sqrt{ab} (r_t^* - r_\tau^*) d\tau \\ q = \sqrt{\frac{b}{a}} p_0 \sin \sqrt{ab} r_t^* + q_0 \cos \sqrt{ab} r_t^* + \\ + \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t f(\tau) \sin \sqrt{ab} (r_t^* - r_\tau^*) d\tau + \int_0^t g(\tau) \cos \sqrt{ab} (r_t^* - r_\tau^*) d\tau \\ r - r_0 = c \int_0^t p q d\tau + \int_0^t h(\tau) d\tau \\ \Theta - \Theta_0 = \int_0^t (p \cos \varphi - q \sin \varphi) d\tau \\ \psi - \psi_0 = \int_0^t \frac{1}{\sin \Theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi) d\tau \\ \varphi - \varphi_0 = \int_0^t [r - \cot \Theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi)] d\tau, \end{cases}$$

dove si è posto

$$(7) \quad r_t^* = \int_0^t r(\tau) d\tau$$

e di cui appunto ci serviremo in seguito.

⁵⁾ Cfr. il primo lavoro citato in ⁴⁾, pagg. 3-6.

3. Noi supporremo che S sia un giroscopio e che z sia il suo asse. Supporremo inoltre che ad S sia stata impressa una fortissima rotazione iniziale $\omega_0 = r_0 \mathbf{k}$ intorno all'asse giroscopico e che sia sottoposto all'unica forza:

$$(8) \quad \mathbf{F} = \lambda \operatorname{sen} (a \varphi) \mathbf{i} \quad \left(\lambda = \text{cost}, a = \frac{C - B}{A} \right)$$

applicata nel punto P dell'asse giroscopico di coordinata $z_p = \frac{1}{\lambda}$.

Una tale forza è un esempio di forza dipendente dall'angolo φ di rotazione propria di S ⁶⁾. Per le ipotesi testè fatte si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} p_0 = q_0 = 0, & A = B, & a = b, & c = 0 \\ \mathbf{M} = (P - O) \wedge \mathbf{F} = \lambda z_p \operatorname{sen} (a \varphi) \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \operatorname{sen} (a \varphi) \mathbf{j} \\ M_x = M_z = f = h = 0, & g(t) = \frac{M_y}{A} = \frac{\operatorname{sen} a \varphi}{A} \end{cases}$$

onde sostituendo nelle (6) segue:

$$(10) \quad \begin{cases} p = -\frac{1}{A} \int_0^t \operatorname{sen} a \varphi(\tau) \operatorname{sen} a r_0(t - \tau) d\tau \\ q = \frac{1}{A} \int_0^t \operatorname{sen} a \varphi(\tau) \cos a r_0(t - \tau) d\tau \\ r = r_0 \end{cases}$$

Applicando invece l'equazione (1) del principio dell'effetto giroscopico si ha:

$$(11) \quad \begin{cases} p = -\frac{M_y}{Cr_0} = -\frac{\operatorname{sen} a \varphi}{Cr_0} \\ q = \frac{M_x}{Cr_0} = 0. \end{cases}$$

⁶⁾ Tenendo conto dei coseni direttori del versore \mathbf{i} dell'asse x rispetto agli assi fissi si ha infatti:

$$\begin{cases} F_\xi = \lambda \operatorname{sen} a \varphi (\cos \varphi \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \cos \theta) \\ F_\eta = \lambda \operatorname{sen} a \varphi (\cos \varphi \operatorname{sen} \psi + \operatorname{sen} \varphi \cos \psi \cos \theta) \\ F_\zeta = \lambda \operatorname{sen} a \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

4. Faremo ora due osservazioni, di cui ci serviremo in seguito, sull'integrale :

$$(12) \quad \int_0^t \frac{H(\tau, r_0)}{E^m(\tau, r_0)} d\tau$$

ove si suppone che sia $m \geq 0$ e che $E(t, r_0)$ sia infinita dello stesso ordine di r_0 quando $r_0 \rightarrow \infty$.

1) Se la funzione $H(t, r_0)$ è infinitesima di ordine n per $r_0 \rightarrow \infty$, l'integrale (12) è infinitesimo di ordine $m + n$ almeno.

2) Se la funzione $H(t, r_0)$ è del tipo :

$$(13) \quad H = K(t, r_0) \sin Q(t, r_0), \quad H = K(t, r_0) \cos Q(t, r_0)$$

con Q e \dot{Q} infiniti dello stesso ordine di r_0 e $K, \dot{K}, \frac{K\dot{E}}{E}, \frac{\ddot{Q}}{\dot{Q}}$ infinitesimi di ordine n quando $r_0 \rightarrow \infty$, l'integrale (12) è infinitesimo con $\frac{1}{r_0}$ di ordine $m + n + 1$ almeno.

La verifica dell'osservazione 1) è immediata; la 2) discende poi direttamente dalle relazioni :

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_0^t \frac{K(\tau, r_0) \sin Q(\tau, r_0)}{E^m(\tau, r_0)} d\tau &= \left[-\frac{K(\tau, r_0) \cos Q(\tau, r_0)}{E^m(\tau, r_0) \dot{Q}(\tau, r_0)} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \\ &+ \int_0^t \frac{1}{E^m \dot{Q}} \left[\dot{K} - \left(\frac{m \dot{E}}{E} + \frac{\ddot{Q}}{\dot{Q}} \right) K \right] \cos Q(\tau, r_0) d\tau \\ \int_0^t \frac{K(\tau, r_0) \cos Q(\tau, r_0)}{E^m(\tau, r_0)} d\tau &= \left[\frac{K(\tau, r_0) \sin Q(\tau, r_0)}{E^m(\tau, r_0) \dot{Q}(\tau, r_0)} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \\ &- \int_0^t \frac{1}{E^m \dot{Q}} \left[\dot{K} - \left(\frac{m \dot{E}}{E} + \frac{\ddot{Q}}{\dot{Q}} \right) K \right] \sin Q(\tau, r_0) d\tau \end{aligned}$$

che si ricavano mediante integrazione per parti.

5. Proveremo ora che l'equazione (1) del principio dell'effetto giroscopico non approssima la posizione di S. A tal fine calcoleremo l'angolo di nutazione Θ di S, prima mediante le espressioni esatte (10) di p e q , e poi mediante le (11) ottenute applicando l'equazione del principio del-

l'effetto giroscopico. Il confronto fra le relazioni trovate proverà l'asserto. Nel fare questi calcoli, per semplicità, penseremo d'avere scelto, com'è sempre possibile, la terna arbitraria fissa $T'(\xi, \eta, \zeta)$ di origine O in modo che sia:

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Cominciamo con l'osservare che le (10), per le formule di prostaferesi, si possono scrivere:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} 2Ap &= \int_0^t \cos a [\varphi(\tau) + r_0(t-\tau)] d\tau - \int_0^t \cos a [\varphi(\tau) - r_0(t-\tau)] d\tau \\ 2Aq &= \int_0^t \sin a [\varphi(\tau) + r_0(t-\tau)] d\tau + \int_0^t \sin a [\varphi(\tau) - r_0(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \right.$$

Posto:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \int_0^t \sin a [\varphi(\tau) - r_0\tau] d\tau, \quad V = \int_0^t \cos a [\varphi(\tau) - r_0\tau] d\tau \\ U_1 &= \int_0^t \sin a [\varphi(\tau) + r_0\tau] d\tau, \quad V_1 = \int_0^t \cos a [\varphi(\tau) + r_0\tau] d\tau \end{aligned} \right.$$

quando si sostituiscono le (16) nella (6₄) moltiplicata per $2A$ e si tiene conto della (15₁), con facili passaggi trigonometrici, si ha:

$$(18) \quad 2A \left(\Theta - \frac{\pi}{2} \right) = \int_0^t (V - V_1) \cos(\varphi + a r_0 \tau) d\tau - \\ - \int_0^t (U + U_1) \sin(\varphi + a r_0 \tau) d\tau.$$

Integrando per parti, come nelle (14), segue:

$$(19) \quad 2A \left(\Theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{(V - V_1) \sin(\varphi + a r_0 t) + (U + U_1) \cos(\varphi + a r_0 t)}{a + r_0} -$$

$$- \int_0^t \frac{(\dot{V} - \dot{V}_1) \sin(\varphi + a r_0 \tau) + (\dot{U} + \dot{U}_1) \cos(\varphi + a r_0 \tau)}{\dot{\varphi} + a r_0} \\ - \frac{\ddot{\varphi}}{(\dot{\varphi} + a r_0)^2} [(V - V_1) \sin(\varphi + a r_0 \tau) + (U + U_1) \cos(\varphi + a r_0 \tau)] \Big\} d\tau$$

ove per la (4), (9) e (10) è:

$$(20) \quad \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi} + a r_0} = \frac{1}{\dot{\varphi} + a r_0} \left[\frac{\dot{\Theta}}{\sin^2 \Theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi) - \right. \\ \left. - \cot \Theta (\dot{p} \sin \varphi + \dot{q} \cos \varphi) - \dot{\varphi} \cot \Theta (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \right] = \\ = \frac{1}{\dot{\varphi} + a r_0} \left(\frac{1 + \cos^2 \Theta}{\sin \Theta} \dot{\Theta} \dot{\varphi} - \frac{\cot \Theta}{A} \sin a \varphi \cos \varphi \right) - \\ - \frac{(a + 1) r_0}{\dot{\varphi} + a r_0} \dot{\Theta} \cot \Theta.$$

Se $(0, t)$ è un intervallo in un $\cot \Theta$ si mantiene limitata quando $r_0 \rightarrow \infty$), dalla (19) per la (4₆) segue che $\Theta - \frac{\pi}{2}$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $\frac{1}{r_0}$ quando $r_0 \rightarrow \infty$. Ma quando $\Theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\cot \Theta$ e $\Theta - \frac{\pi}{2}$ sono infinitesimi dello stesso ordine, onde anche

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi} + a r_0}, \quad \varphi(\tau) - r_0 \tau = - \int_0^\tau \cot \Theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) dx$$

7) Si verifica facilmente che esistono intervalli $(0, t)$ siffatti. Dalla (6₄) per le (11), qualunque sia r_0 , segue

$$|\theta - \frac{\pi}{2}| \leq \frac{1}{A} \int_0^t [|p \cos \varphi| + |q \sin \varphi|] d\tau \leq \frac{1}{A} \int_0^t 2 d\tau = \frac{t^2}{A},$$

e quindi

$$\frac{\pi}{2} - \frac{t^2}{A} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{t^2}{A}.$$

Pertanto in ogni intervallo $(0, t)$ con $t > \sqrt{\frac{A\pi}{2}}$, $\cot \theta$ si mantiene limitata qualunque sia r_0 .

e quindi U e \dot{U} sono infinitesimi dello stesso ordine di $\frac{1}{r_0}$ quando $r_0 \rightarrow \infty$ e inoltre, a meno di infinitesimi del 1° ordine si ha: $V = t$, $\dot{V} = 1$. D'altra parte alla V_1 e alla U_1 si può applicare l'osservazione 2) del n. 4 con $K = 1$, $m = 0$, $Q(\tau, r_0) = \varphi(\tau) + a r_0 \tau$, pertanto dalla (19), per l'osservazione 1) del n. 4, a meno di infinitesimi di ordine non inferiore al secondo, segue:

$$(21) \quad 2A \left(\Theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{t \operatorname{sen}(\varphi + a r_0 t)}{\dot{\varphi} + a r_0} - \\ - \int_0^t \frac{[1 - \cos a(\varphi + r_0 \tau)] \operatorname{sen}(\varphi + a r_0 \tau) + \operatorname{sen} a(\varphi + r_0 \tau) \cos(\varphi + a r_0 \tau)}{\dot{\varphi} + a r_0} d\tau.$$

Ma l'integrale a secondo membro della relazione precedente si trasforma facilmente, mediante le formule di prostaferesi, in una combinazione lineare a coefficienti costanti di integrali del tipo (12) con $H(\tau, r_0)$ del tipo (13), e precisamente con $K = m = 1$, $E(\tau, r_0) = \dot{\varphi}(\tau) + a r_0$ e $Q(\tau, r_0)$ coincidente con una delle seguenti funzioni: $\varphi + a r_0 \tau$, $(a + 1)\varphi + 2a r_0 \tau$, $(a - 1)\varphi$. Quindi per l'osservazione 2) del n. 4 segue che è un infinitesimo con $\frac{1}{r_0}$ del 2° ordine almeno quando $r_0 \rightarrow \infty$.

Osservato poi che a meno di infinitesimi del 2° ordine è $\frac{1}{\dot{\varphi}} = \frac{1}{r_0}$ e che

$$A(a + 1) = A \left(\frac{C - A}{A} + 1 \right) = C,$$

dalla (21) a meno di infinitesimi del 2° ordine segue:

$$(22) \quad \Theta - \frac{\pi}{2} = \frac{t \operatorname{sen}(\varphi + a r_0 t)}{2 C r_0}.$$

Quando invece nella (6₄) si sostituiscono le (11) si ha:

$$(23) \quad \Theta - \frac{\pi}{2} = - \frac{1}{C r_0} \int_0^t \operatorname{sen} a \varphi \operatorname{sen} \varphi d\tau,$$

ove l'integrale a secondo membro, per le formule di prostaferesi e per l'osservazione 2) del n. 4, è infinitesimo dello stesso ordine almeno di $\frac{1}{r_0}$ quando $r_0 \rightarrow \infty$.

Il confronto fra la (22) e (23) prova quindi che l'equazione (1) del principio dell'effetto giroscopico non approssima la posizione di S.

GENESI E COSTITUZIONE DEL TUFO GIALLO NAPOLETANO

*Nota del prof. Riccardo Sersale,
presentata dal socio G. Malquori*

(Adunanza del dì 7 giugno 1958)

Sunto — L'Autore descrive l'impostazione ed i risultati della sperimentazione per riprodurre le condizioni che presumibilmente determinarono la trasformazione delle ceneri emesse nelle eruzioni esplosive dei vulcani della zona flegrea, ossia delle classiche pozzolane, in quella roccia compatta che è il tufo giallo napoletano.

Le azioni derivanti da fenomeni pneumatolitici e idrotermali sono state riprodotte sottoponendo le pozzolane all'azione dell'acqua a varie temperature e pressioni, nonchè in presenza di particolari agenti chimici quali: anidride carbonica, alogeni, sali alogenati, alcali, sali alcalini, spingendo pressione e temperatura fino in prossimità delle condizioni critiche.

Si è potuto così confermare che l'alterazione per autometamorfismo e non per diagenesi, della pozzolana flegrea, alcalitrachitica, è all'origine del tufo giallo napoletano.

Infatti, per trattamento idrotermale di quelle pozzolane, a temperature e pressioni moderate ($p \sim 30 \text{ Kg/cm}^2$; $t \sim 235^\circ \text{ C}$) e in ambiente debolmente alcalino ($\text{KOH} \sim 1\%$), si è ottenuto un prodotto di reazione con caratteristiche costituzionali simili a quelle del tufo giallo suddetto.

I caratteri di entrambi i materiali: il naturale e l'artificiale (composizione, spettro di raggi X, curva di disidratazione termica, capacità di scambio basico ecc.) convergono nell'indicare che la massa di fondo, cementante, del tufo giallo napoletano è di natura zeolitica e che la zeolite predominante è l'*Herschelite*.

Aumentando la temperatura e la pressione del trattamento idrotermale ($p \sim 120 \div 200 \text{ kg/cm}^2$, $t \sim 350 \div 375^\circ$), nonchè la concentrazione dell'alcali della soluzione di contatto ($\text{KOH} \sim 3\%$), spariscono i caratteri zeolitici del prodotto di reazione, il quale risulta decisamente feldspatizzato ad ortoclasio.

Lo stesso processo di feldspatizzazione è stato osservato partendo dal tufo giallo tipico, nonchè da un campione di cabasite proveniente dal Museo di mineralogia dell'Università di Napoli, sottoposti entrambi al trattamento idrotermale a temperatura e pressione elevate.

Il tufo giallo napoletano, che è caratteristico del secondo periodo di attività del vulcanismo flegreo, è stato oggetto, in questi ultimi tempi, di indagini dirette essenzialmente a chiarire la natura della frazione cementante, onde poter di poi risalire alla interpretazione del processo di alterazione subito dall'aliquota vetrosa, reattiva, della pozzolana flegrea, alcalitrachitica, che a detti tufi gialli ha dato origine.

Come è noto ¹⁾, la pozzolana flegrea proviene da eruzioni di carattere esplosivo.

I gas delle eruzioni medesime avendo trascinato con violenza e disperso nell'atmosfera circostante le particelle del magma liquido ne hanno provocato la tempra e lo stabilirsi dello stato vetroso.

Le particelle costituenti le ceneri, depositandosi di poi hanno dato origine a coltri più o meno spesse di materiale piroclastico, incoerente, il quale per particolari situazioni, può essere stato sollecitato dall'azione chimica esercitata dagli stessi gas che lo hanno trascinato nel corso del processo eruttivo, nonchè da quella di altri fattori di alterazione: endogeni o esogeni.

Nell'esame petrografico del tufo giallo napoletano, risalta la freschezza dei costituenti cristallini: segnatamente il sanidino, proveniente dalla pozzolana originaria, freschezza la quale contrasta con la profonda alterazione della massa cementante di fondo, proveniente, come è stato già detto, dall'alterazione del vetro vulcanico particolarmente reattivo e costituente essenziale della pozzolana ²⁾.

Il prof. SHERILLO in un suo recente studio ³⁾ su questo interessante argomento, descrive la constatazione dell'esistenza di un passaggio graduale dell'aspetto e delle proprietà, da pozzolana a tufo attraverso una roccia di caratteristiche intermedie, roccia che si rinviene appunto al contatto fra pozzolana e tufo e che viene indicata localmente con la denominazione di: « mappamonte ».

Per quanto ha attinenza con la composizione chimica, il prof. SCHE-

¹⁾ G. DE LORENZO. *L'attività vulcanica nei Campi Flegrei*. Questo Rendiconto, [3], X, 203 (1904).

G. D'ERASMO. *I crateri della pozzolana nei Campi Flegrei*. Atti R. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, [2], XIX, 1 (1931).

G. MALQUORI e F. SASSO. *Le pozzolane dei dintorni di Napoli*. Ricerca Scient., VI, 2, 3 (1935).

N. PARRAVANO e V. CAGLIOTI. *Ricerche sulle pozzolane*. Memorie R. Accademia d'Italia, Classe Scienze Fis. Mat. e Naturali, 8, 366 (1937).

F. PENTA. *Su uno studio delle pozzolane flegree*. Ricerca Scient., VIII, 1, 108 (1937). — *Contributo agli studi sulle pozzolane con speciale riguardo alle pozzolane romane*. L'Ind. Miner., IV, 9, 409 (1953). — *Sulle pozzolane del Lazio*. Ann. di Chimica, 44, 572, (1954).

²⁾ A. SCHERILLO. *Petrografia chimica dei tufi flegrei*. Nota I. Questo Rendiconto, [4], XVII, 343 (1950). — Nota II. *Tufo giallo, mappamonte, pozzolana*. Questo Rendiconto, [4], XXII, 345 (1955).

E. NORIN. *The mineral composition of the Neapolitan yellow tuff*. Geolog. Rundschau, 43, 526 (1955).

³⁾ L. c.

RILLO ha notato che la trasformazione del vetro pozzolanico induce nel mappamonte, e più ancora nel prodotto finale: il tufo giallo, un più elevato contenuto di acqua di costituzione; ha rilevato invece una leggera progressiva diminuzione, passando da pozzolana a tufo, del titolo degli alcali, nonchè, in rapporto al colore giallo che caratterizza appunto quel tufo, un incremento notevole del rapporto $\text{Fe}_2\text{O}_3/\text{FeO}$.

Tuttavia la presenza di costituenti diversi dalla massa di fondo quali, gli inclusi di pomice e di ossidiana, i frammenti cristallini di sanidino, di labradorite, di pirosseni ecc., non permette di trarre, dall'esame della composizione chimica di codesti materiali, altre deduzioni in riferimento alla precisazione dei loro caratteri costituzionali nonchè alla loro genesi.

Parimente, l'esame delle sezioni sottili non fornisce ulteriori elementi utili alla individuazione del costituente o dei costituenti la frazione del tufo giallo, proveniente dall'alterazione del vetro pozzolanico.

Riconoscibili all'esame ottico sono solo gli elementi cristallini ricordati più sopra, provenienti tutti dalle pozzolane originarie. Codesti costituenti, insieme con le pomici ed i frammenti di ossidiana appaiono per tanto, in sezione sottile, cementati da una massa interstiziale, giallastra, apparentemente isotropa.

Di maggiore rilievo appare il risultato delle analisi: termica-differenziale e termo-ponderale, che ha fornito delle curve di disidratazione prive di punti singolari. L'eliminazione dell'acqua costituzionalmente contenuta nel tufo giallo e nel mappamonte, avviene cioè alla stessa maniera di quel che si osserva per i minerali zeolitici.

L'andamento delle curve termiche renderebbe per tanto lecita — almeno nell'ambito della sensibilità delle nostre apparecchiature sperimentali — la esclusione dei minerali argillosi fra i prodotti dell'alterazione del vetro pozzolanico.

Significativa è invece l'analogia con il comportamento delle zeoliti. Tuttavia come è stato già detto, l'esame ottico in sezione sottile non ha permesso di svelare la presenza di tali costituenti nella massa di fondo dei tufi gialli napoletani.

L'assieme delle constatazioni su riferite ha portato il prof. SCERRILLO ⁴⁾ a dover escludere che fenomeni diagenetici siano all'origine dei tufi suddetti, i quali deriverebbero invece dalle pozzolane per autometamorfismo.

Le circostanze che avrebbero provocato la trasformazione della parte vetrosa della pozzolana originaria, sarebbero: la temperatura, una moderata pressione e soprattutto la presenza dell'acqua nonchè quella di: CO_2 , SO_2 , SO_3 , Cl_2 , ecc.

⁴⁾ L. c.

All'origine di questi materiali, i gas ed i vapori presenti, sotto pressione, negli strati inferiori delle spesse coltri pozzolaniche — tuttora calde — avrebbero determinato l'alterazione di gran parte del vetro pozzolanico dalla quale è derivata la massa interstiziale che ha cementato il materiale piroclastico.

A conclusioni non molto dissimili da quelle del prof. SCHERILLO è giunto E. NORIN ⁵⁾, il quale, allo scopo di individuare la natura della fase interstiziale, ha cimentato il tufo giallo napoletano in differenti direzioni.

L'indagine petrografica gli avrebbe permesso di rilevare, nella massa di fondo del tufo giallo, delle formazioni zeolitiche, debolmente birifrangenti, particolarmente evidenti nei pori e nelle cavità degli inclusi pomicei.

A mezzo di un attacco chimico differenziato per crescenti concentrazioni dei reattivi, onde provocare la graduale demolizione del materiale di partenza, il NORIN avrebbe potuto separare la frazione pelitica del tufo giallo e individuarne la composizione, la quale, unita alle risultanze dell'esame röntgenografico ed a quelle dell'analisi termica differenziale, ha reso lecito a questo studioso di supporre la presenza di una zeolite del gruppo delle cabasiti contenenti potassio (herschelite) quale costituente della massa di fondo.

Secondo NORIN sarebbero altresì presenti nella frazione pelitica del tufo giallo napoletano, dei minerali argillosi di tipo montmorillonitico, nonchè dell'idromica ⁶⁾.

La presenza dei minerali zeolitici, e probabilmente dell'herschelite, è stata rilevata nel tufo giallo di Vivara, da G. DE LORENZO e C. RIVA ⁷⁾, i quali hanno individuato, accanto alla natrolite, delle formazioni cristalline incolori o leggermente gialline, trasparenti, con carattere ottico uniasico, positivo, e indice di rifrazione poco inferiore a 1,485.

E' da tener presente che sia nelle pozzolane sia nel tufo litoide di Vicovaro (media valle dell'Aniene) il prof. SCHERILLO ⁸⁾ ha potuto individuare una sostanza interstiziale cristallina, probabilmente di natura zeolitica.

Per una roccia poi di aspetto, consistenza, composizione, costituzione e tessitura del tutto simili a quelle del tufo giallo napoletano: il « trass » renano di Andernach — adoperato da secoli, previa polverizzazione, come ottimo materiale ad azione pozzolanica per la confezione di conglomerati

⁵⁾ L. c.

⁶⁾ L. c.

⁷⁾ G. DE LORENZO e C. RIVA. *Il cratere di Vivara nelle isole flegree*. Atti R. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, [2], 10, 1 (1900).

⁸⁾ A. SCHERILLO. *Inclusi nelle pozzolane della media valle dell'Aniene*. Period. Miner., 6, 170 (1935). — N. PARRAVANO e V. CAGLIOTI. L. c.

cementizi — si conosce da tempo che tale materiale presenta comportamento zeolitico se cimentato nei riguardi della sua attitudine allo scambio basico ⁹⁾, *).

Recentemente la cabasite sarebbe stata individuata quale costituente del su rammentatò « trass » renano ¹⁰⁾.

E siccome le zeoliti possono prender origine dall'alterazione del vetro vulcanico a seguito di fenomeni idrotermali, il NORIN ¹¹⁾ deduce che il tufo giallo napoletano deriva dalla pozzolana originaria la cui parte vetrosa, chimicamente instabile, ha subito un processo di alterazione — anche a temperatura e pressione moderata — per opera dell'acqua alla quale possono essersi addizionati altri agenti chimici capaci di favorire l'attacco.

Di proposito, abbiamo iniziato le nostre indagini sulla base del già citato lavoro del prof. SCHERILLO ¹²⁾, nel corso del quale è stata presa in esame la potente formazione pozzolanica esistente a nord della strada Capodimonte-Marano e ad est del parco della reggia di Capodimonte, formazione la quale è attribuita al secondo periodo del vulcanismo flegreo.

L'Autore, come è ricordato in principio, ha indagato sul passaggio da pozzolana a tufo giallo, attraverso il termine intermedio denominato mappamonte; fenomeno questo che è rilevabile con chiara evidenza in molti punti della su detta zona dove al contatto fra pozzolana e tufo è riconoscibile la sequenza: pozzolana grigia, incoerente, spesso pisolitica; mappamonte, grigio-giallo, semi-coerente e ricco di pisoliti; in fine, il tufo compatto di color giallo paglierino.

Il prof. SCHERILLO ¹³⁾ ha mostrato che la trasformazione di cui sopra non è accompagnata da notevoli spostamenti della composizione chimica, salvo che per il contenuto d'acqua chimicamente legata, il quale, come è stato già riferito, aumenta sensibilmente e progressivamente passando dalla pozzolana al tufo attraverso il mappamonte.

Ed appunto all'acqua, alla quale si sono probabilmente associati taluni agenti chimici, si deve l'alterazione del vetro dei materiali pirocla-

⁹⁾ K. BIEHL e W. WITTEKIND. *Versuche zum Nachweis der zeolitischen Natur der trass*. Tonin. Zeit., 58, 499, 515 (1934).

*) Sulle strettissime analogie di costituzione e di comportamento fra il trass renano ed il tufo giallo napoletano, è riferito in una nota in corso di pubblicazione.

¹⁰⁾ J. CHAPELLE. *Attaque sulfo-calcique des laitiers et des pouzzolanes*. Rev. des Mater. de constr. et de Trav. publics., 159 (1958).

¹¹⁾ L. c.

¹²⁾ L. c.

¹³⁾ L. c.

stici che avrebbe permesso loro di cementarsi dando origine alla roccia compatta attraverso la sequenza evolutiva: pozzolana → mappamonte → tufo.

Essendoci proposti di ricostruire con esperienze di laboratorio il processo di trasformazione che dalla pozzolana conduce al tufo giallo, e quindi di risalire alla costituzione del medesimo, siamo partiti dalla pozzolana della formazione su indicata, già studiata e descritta dal prof. SCHERILLO, e ne abbiamo esaminato il comportamento verso trattamenti di tipo idrotermale o pneumatolitico, diretti a rilevare le condizioni più favorevoli alla trasformazione: pozzolana → mappamonte → tufo giallo.

I fattori che abbiamo preso in esame sono stati i seguenti: temperatura, pressione, durata dell'attacco, presenza nel sistema di piccole quantità di agenti chimici, anche gasosi, ritenuti adatti ad accelerare, se non addirittura a determinare la trasformazione che si produce a seguito del trattamento idrotermale.

La pozzolana e il lapillo pomiceo che abbiamo sottoposto a tale trattamento sono stati prelevati direttamente sul posto e a notevole distanza dalla zona del mappamonte, cioè dal contatto con il tufo.

Al microscopio, codesti materiali, di tipo alcalitrachitico, presentano l'aspetto e le caratteristiche ottiche già descritte dal prof. SCHERILLO ¹⁴). La frazione cristallina presente è essenzialmente del sanidino. Più rari, dei cristalli di labradorite e di pirosseni.

Dalla medesima zona abbiamo altresì repertato i campioni di tufo giallo napoletano e di mappamonte che sono stati adoperati nel corso delle nostre indagini.

All'esame ottico in sezione sottile essi mostrano, cementati nella massa di fondo, gli stessi costituenti cristallini della pozzolana dalla quale presero origine.

Notevole è la freschezza dei fenocristalli, specie del sanidino; dal che è lecito di dedurre che il processo di alterazione che ha originato il tufo interessò soltanto la parte più labile, cioè la sola frazione vetrosa della pozzolana.

Nella tab. I riportiamo la composizione chimica dei materiali di esame insieme con quella del tufo giallo e del mappamonte.

¹⁴) L. c.

TABELLA I.

(percentuale sul secco a 105°C.)

	Pozzolana chiara	Lapillo pomiceo	Ossidiana	Mappamonte	Tufo giallo
SiO ₂	57,80 %	57,91 %	57,97 %	56,40 %	54,68 %
Al ₂ O ₃ + TiO ₂ + Mn ₂ O ₃	18,34 %	19,05 %	19,35 %	18,90 %	17,70 %
Fe ₂ O ₃	2,20 %	1,59 %	2,15 %	2,12 %	3,82 %
FeO	2,14 %	2,29 %	2,37 %	2,02 %	0,29 %
MgO	0,97 %	0,69 %	1,06 %	0,93 %	0,95 %
CaO	3,15 %	3,89 %	4,81 %	2,89 %	3,66 %
K ₂ O	8,05 %	7,75 %	6,78 %	7,61 %	6,38 %
Na ₂ O	4,18 %	4,26 %	3,80 %	3,98 %	3,43 %
H ₂ O +	3,75 %	2,58 %	1,25 %	5,78 %	9,11 %
	100,58	100,01	99,54	100,63	100,02

Sulle differenze fra la composizione chimica di questi campioni non abbiamo nulla da aggiungere a quanto ha già esaurientemente puntualizzato il prof. SCHERILLO ¹⁵⁾. E' invece interessante di rilevare dagli spettrogrammi di raggi X che riportiamo nella tav. I, la presenza delle sole righe dello spettro dell'ortoclasio nei materiali di partenza della nostra sperimentazione e cioè le pozzolane e le pomici.

Nella tav. I accanto agli spettri della pozzolana e del lapillo pomiceo abbiamo voluto mostrare quello ottenuto dal materiale proveniente da un grosso frammento di ossidiana repertato nella medesima località frammisto alla pozzolana. Codesto spettrogramma denota che l'ossidiana nonostante il suo aspetto tipicamente vetroso accusa un contenuto di parte cristallina — che è essenzialmente dell'ortoclasio — maggiore di quello che appare esser contenuto nel lapillo pomiceo e nella pozzolana nei quali si intravedono appena, molto deboli, le principali righe dello spettro di quel feldspato.

Ci si rende conto tuttavia di tale differenza tenendo presente che la sottile cenere vulcanica proveniente dall'eruzione esplosiva, ha subito il raffreddamento, e quindi la tempra, più rapidamente ed energicamente del magma contenuto nella bomba vetrosa dalla quale proveniva il grosso frammento (5-6 cm. di diametro) da noi esaminato.

Da quel magma in via di raffreddamento l'ortoclasio si è potuto separare per cristallizzazione primaria ¹⁶⁾.

E' noto da tempo che solubilizzando la frazione vetrosa delle pozzolane flegree a mezzo dell'attacco acido-basico, il residuo insolubile, cristallino, accusa la composizione dei feldspati, avvicinandosi a quella dell'ortoclasio ¹⁷⁾.

A conferma di codeste osservazioni, nella tav. II riportiamo gli spettri di raggi X dei residui insolubili ricavati attaccando con soluzione di acido cloridrico e successivamente con soluzione di potassa caustica, sia la pozzolana sia il lapillo pomiceo. Riportiamo altresì nella medesima tavola lo spettro del residuo insolubile ottenuto sottoponendo allo stesso trattamento acido-basico, il tufo giallo napoletano.

E' senz'altro evidente la presenza dell'ortoclasio.

Per il trattamento idrotermale ci siamo serviti di uno speciale autoclave di acciaio inossidabile, a mezzo del quale i materiali in questione

¹⁵⁾ L. c.

¹⁶⁾ W. EITEL, *The Physical Chemistry of the Silicates*, Chicago, pag. 710 (1954).

¹⁷⁾ V. MAZZETTI, *Studio di una pozzolana*, Atti R. Istituto d'Incoraggiamento, Napoli, 6 (1934). — N. PARRAVANO e V. CAGLIOTI, L. c., pag. 304.

potevano venir cimentati fino a circa 500°C , e sotto pressione fino a 800 kg/cm^2 .

L'autoclave, agitato meccanicamente (fig. 1), è fasciato dalla camicia riscaldante con esso solidale, e la temperatura viene misurata a mezzo di due coppie termoelettriche: una all'esterno, l'altra all'interno della bomba.

Un termoregolatore potenziometrico permette di assicurare la costanza del fattore temperatura con una approssimazione di $\pm 5^{\circ}\text{C}$.

In talune esperienze, in presenza di agenti particolarmente corrosivi,

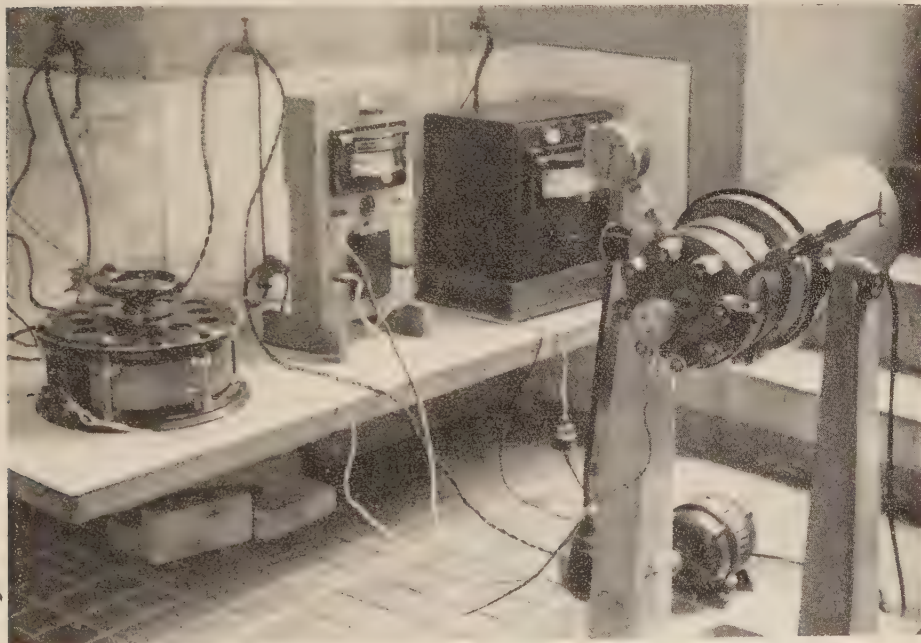


Fig. 1.

Autoclave per sintesi idrotermali, con dispositivi di regolazione e di controllo.

i materiali di esame sono stati introdotti in cilindri di acciaio speciale placcati internamente con metallo nobile (argento o platino) e chiusi con tappo filettato. Tali cilindri venivano immessi nell'autoclave su descritto.

Ciascun campione è stato macinato fino a non lasciar residuo sul setaccio di 10.000 maglie per cm^2 ; dopodichè la polvere è stata introdotta nell'autoclave, o nei cilindri di reazione, insieme con le soluzioni contenenti gli agenti chimici prescelti: per precisare: anidride carbonica, alogeni, sali alogenati, alcali, sali alcalini.

Al termine del trattamento prestabilito il solido è stato separato dalla soluzione, accuratamente lavato e di poi conservato in essiccatore su cloruro di calcio.

E' stato quindi saggiato in differenti direzioni. Se ne è determinata la composizione e si è sottoposto all'analisi termica differenziale, a quella termo ponderale nonchè all'esame röntgenografico.

Abbiamo voluto altresí cimentare i solidi provenienti dal trattamento idrotermale o pneumatolitico, verso l'attacco acido-basico eseguito a mezzo di soluzioni di acido cloridrico e successivamente di potassa caustica, entrambe di concentrazioni differenti onde poter graduare l'energia dell'attacco medesimo.

I risultati ricavati da queste indagini le quali, come è detto in principio, sono dirette ad individuare il tipo e l'entità della trasformazione subita dal materiale di partenza per effetto del trattamento idrotermale, sono concordanti nel loro assieme *).

Si è osservato, in primo luogo, che il titolo dell'acqua legata stabilmente, cioè l'acqua che i materiali provenienti dal trattamento idrotermale non perdono in essiccatore su cloruro di calcio, nè in stufa a 105° C., fino a peso costante, è abbastanza elevato, pur senza mai toccare i valori che competono al tufo giallo tipico.

Come è stato già indicato dalle cifre della tab. I, per i materiali naturali il titolo dell'acqua stabilmente legata è massimo per il tufo e minimo per la pozzolana e per l'ossidiana; il mappamonte presenta dei titoli intermedi.

Nella tab. II riportiamo il titolo di acqua legata che compete ad altri campioni di materiali naturali prelevati sempre nella medesima zona.

T A B E L L A I I .
(percentuale sul secco a 105°C.)

	Contenuto d'acqua
Ossidiana	1,24%
Lapillo pomiceo	2,58%
Pozzolana chiara	3,75%
Pozzolana pisolitica (vicina al tufo tipico)	5,03%
Mappamonte	5,78%
Tufo a contatto con la pozzolana	6,38%
Tufo giallo tipico	9,11%

*) Soltanto taluni dei risultati della presente ricerca sono stati oggetto di una breve comunicazione presentata all'VIII Congresso Nazionale di Chimica, tenutosi a Torino nel mese di Maggio di quest'anno, comunicazione il cui testo è attualmente in corso di pubblicazione negli Atti del su detto Congresso.

Il contenuto di acqua nella sostanza previamente seccata su cloruro di calcio, e in stufa a 105°C, fino a peso costante, è pertanto indice della intensità della trasformazione subita dal materiale di partenza e, per precisare, dalla sua frazione vetrosa.

Onde quindi tentare di stabilire la natura del legame dell'acqua associatasi stabilmente nel solido risultante dal trattamento idrotermale, abbiamo fatto ricorso all'analisi termica differenziale e termo-ponderale.

Le curve perdita di peso/temperatura di cui riportiamo nella fig. 2 la riproduzione fotografica originale *), non mostrano tratti singolari. La disidratazione è cioè del tutto regolare, ed allo stesso modo si comporta, come è già detto, il tufo giallo e il mappamonte ¹⁸⁾.

L'andamento della perdita di acqua in funzione della temperatura è quindi, sia per i materiali naturali sia per quelli ricavati a seguito del trattamento idrotermale, del tutto simile a quello che si osserva disidratando le zeoliti.

Anche il risultato delle prove di stabilità all'attacco acido-basico appare strettamente collegato con quello della determinazione del titolo dell'acqua stabilmente fissata, titolo che abbiamo assunto a indice del grado di alterazione della pozzolana di partenza.

A pari modalità del saggio (quantità, concentrazione dei reattivi, temperatura e durata dell'attacco) il tufo giallo napoletano è il più instabile fra i materiali esaminati.

Si noti a questo punto che una elevata reattività, in genere, è considerata caratteristica peculiare delle zeoliti ¹⁹⁾.

Nelle tabelle III e IV sono riportati i risultati ottenuti mediante un attacco acido-basico molto blando, eseguito a mezzo di acido cloridrico diluito (1,5 %) e successivamente di soluzione di potassa caustica al 5 %.

Il confronto del comportamento dei diversi materiali è del tutto omogeneo in quanto restano costanti per ogni saggio: la quantità ed il grado di finezza del materiale cimentato **), il volume dei reattivi, la temperatura e la durata del contatto, nonchè le altre diverse modalità delle fasi operative.

*) Le curve della fig. 2 sono state ottenute a mezzo di una sensibile termo-bilancia a registrazione fotografica.

¹⁸⁾ A. SCHERILLO. L. c.

¹⁹⁾ W. EITEL. L. c., pag. 994.

**) passante al setaccio di 10.000 maglie/cm².

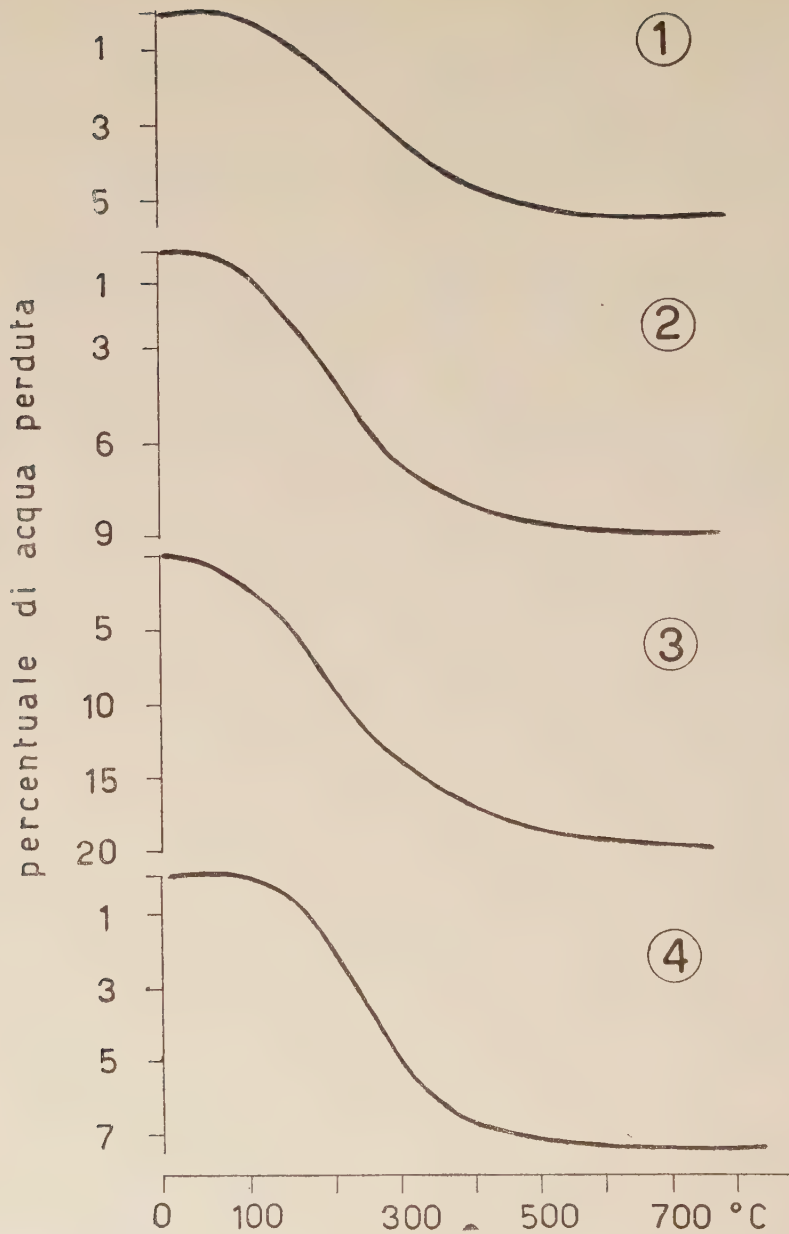


Fig. 2.

Diagrammi: perdita di peso/temperatura.

- 1) Mappamonte.
- 2) Tufo giallo napoletano.
- 3) Cabasite di Rubendörffel, presso Leitmeritz (Boemia).
- 4) Pozzolana, dopo trattamento idrotermale (cfr. tabella IV).

TABELLA III.

(percentuale sul secco a 105°C.)

	Contenuto d'acqua	Residuo all'attacco acido-basico
Ossidiana	1,24 %	67,32%
Lapillo pomiceo	2,58 %	65,90%
Pozzolana chiara	3,75 %	63,88%
Pozzolana pisolitica (vicina al tufo tipico)	5,03 %	57,10%
Mappamonte	5,78 %	52,98%
Tufo a contatto con la pozzolana	6,38 %	44,08%
Tufo giallo tipico	9,11 %	26,72%

Si noti che sia per i materiali ricavati a seguito del trattamento idrotermale sia, come si è già indicato, per quelli naturali, il titolo di acqua legata è tanto più alto quanto minore è il residuo all'attacco acido-basico cioè quanto più profonda è risultata la trasformazione del vetro pozzolanico per effetto del trattamento subito.

Si noti ancora, dalle cifre della tab. IV, che meglio di qualsiasi altro agente chimico sono risultati gli alcali i più idonei a fornire dei materiali artificiali che per il titolo dell'acqua stabilmente legata e per quello del residuo insolubile all'attacco acido-basico più si avvicinano al tufo giallo napoletano.

I differenti materiali ottenuti dal su descritto trattamento idrotermale della pozzolana e del lapillo pomiceo — per le condizioni sperimentali su indicate e cioè: moderate pressioni e temperature — li abbiamo sottoposti all'esame röntgenografico, esame il quale ci ha mostrato che procedendo l'alterazione del vetro pozzolanico (aumento del titolo di acqua legata e contemporanea diminuzione del residuo insolubile all'attacco acido-basico) si viene delineando vieppiù netto uno spettro di righe che denota l'accentuarsi del carattere cristallino del materiale in via di progressiva alterazione, la quale procede verso l'assetto che caratterizza il mappamonte e successivamente il tufo giallo.

Con il procedere dell'attacco idrotermale della pozzolana o del lapillo pomiceo di partenza, in ambiente leggermente alcalino, si giunge, in definitiva, ad uno spettro di raggi X del tutto simile a quello del tufo giallo tipico (tav. III e tab. V).

TABELLA IV.

Materiali naturali di partenza	Condizioni di esperienza				Caratteristiche del prodotto finale (sul secco a 105° C.)	
	Soluzione di contatto	Pressione (kg/cm ²)	Temperatura (° C)	Durata (ore)	Contenuto d'acqua stabilmente legata %	Residuo allo attacco acido-basico %
Pozzolana chiara	H ₂ O	30	235	24	4,98	58,48
Lapillo pomiceo	H ₂ O	30	235	30	4,44	61,20
Pozzolana chiara	HCl all'1%	30	235	6	5,17	61,82
»	»	30	235	60	5,48	61,44
»	»	60	280	6	5,67	61,66
»	HF all'1%	30	235	6	6,08	41,65
»	acqua di cloro (al 5%)	60	280	6	5,48	58,69
»	NH ₄ Cl al 0,5%	30	235	6	4,85	60,44
»	»	60	280	60	5,42	56,00
»	NH ₄ Cl al 0,5% (in atmosfera CO ₂)	60	260	60	5,79	51,52
»	KOH al 0,5%	10	178	21	5,57	52,64
»	» all'1%	30	235	18	6,74	37,42
»	»	30	235	96	7,39	36,52
»	»	60	280	6	7,43	34,41
Lapillo pomiceo	KOH all'1%	30	235	30	7,00	30,02
»	»	50	280	30	5,06	45,18
»	K ₂ CO ₃ all'1%	30	235	30	5,47	48,98
Ossidiana	KOH all'1%	30	235	30	2,96	63,47
»	KOH al 3%	30	235	30	3,35	56,76

TABELLA V.

Tufo giallo napoletano		Pozzolana dopo trattamento idrotermale a 30 kg/cm ² , 235° C, per 30 ore in presenza di KOH all'1% (cfr. tab. IV)	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
m	9,45	m	9,47
mf	7,16	m	7,17
m	5,52	md	5,56
m	5,02	m	5,02
f	4,34	f	4,32
dd	4,12	d	4,08
dl	3,60	dl	3,58
ff	3,19	ff	3,20
ff	2,93	ff	2,93
d	2,68	d	2,68
d	2,07	d	2,06
d	1,98	d	1,96
d	1,86	d	1,79
d	1,79	d	1,76
md	1,72	md	1,72

f = forte; ff = fortissima; m = media; mf = media debole; md = media larga; d = debole; dl = debole larga; dd = debolissima.

Riteniamo utile di precisare qui di seguito le condizioni sperimentali più adatte per conseguire questo interessante risultato:

temperatura	circa 235° C.
pressione	circa 30 kg/cm ²
soluzione di contatto . . .	KOH 1 %
durata del trattamento . . .	circa 30 ore.

Il materiale artificiale il cui spettro di raggi X è del tutto simile a quello del tufo giallo napoletano accusa le caratteristiche che riportiamo nella tab. VI.

TABELLA VI.
(percentuale sul secco a 105°C)

	Pozzolana di partenza	Pozzolana dopo il trattamento idrotermale
SiO ₂	57,80%	55,35%
Al ₂ O ₃ + TiO ₂ + Mn ₂ O ₄	18,34%	18,47%
Fe ₂ O ₃	4,57%	3,90%
MgO	0,97%	0,78%
CaO	3,15%	3,06%
K ₂ O	8,05%	3,95%
Na ₂ O	4,18%	2,80%
H ₂ O+	3,75%	7,39%
Residuo insolubile all'attacco acido-basico *)	100,81 63,88	100,70 36,52

Se si confronta la composizione del tufo giallo tipico (vedi tab. I) con quella dal materiale artificiale indicata nella tab. VI, si nota che il titolo di K₂O di quest'ultimo è più alto di quello del tufo, mentre più basso è il titolo di Na₂O.

Tale constatazione indica che nel decorso del processo idrotermale in ambiente alcalino per potassa, parte del sodio contenuto nella pozzolana e nelle pomici di partenza è stata sostituita con il potassio.

L'acqua stabilmente legata viene perduta in modo regolare all'innal-

*) con le modalità descritte nel corso della nota.

zarsi della temperatura, con andamento cioè del tutto analogo a quello presentato dal tufo e dalle zeoliti (vedi fig. 2).

Gli spettrogrammi dei materiali ricavati mediante il trattamento idrotermale eseguito alle condizioni indicate nella tab. IV, in presenza di agenti chimici differenti dagli alcali, sono nettamenti diversi da quelli del mappamonte e del tufo giallo, riprodotti nella tav. III.

Per le temperature e le pressioni fin qui considerate (vedi tab. IV), appare il solo spettro dell'ortoclasio (tav. IV) e assai più netto di quello rilevabile con l'esame dei materiali di partenza, quasi che il trattamento in questione ne aumentasse la frazione cristallina.

Comunque, l'alterazione della pozzolana e delle pomici per trattamento idrotermale nelle condizioni su descritte, cioè in assenza di alcali, è tuttora oggetto di studio nel nostro Istituto. Su questo argomento verrà riferito in una nota successiva.

Esaurita con successo la prima parte della sperimentazione che ci ha permesso di individuare le condizioni alle quali è possibile di passare dalle pozzolane e dalle pomici a un materiale costituzionalmente simile al tufo giallo napoletano, abbiamo voluto indagare ulteriormente intorno alla natura del costituente o dei costituenti cristallini presenti nella frazione cementante del tufo giallo e provenienti dall'alterazione del vetro pozzolanico a seguito di un processo di trasformazione di carattere tipicamente idrotermale o pneumatolitico.

Il comportamento alla disidratazione termica, la labilità di fronte agli attacchi chimici, la stessa possibilità del tufo giallo di esser riprodotto mediante trattamento idrotermale, in ambiente debolmente alcalino, trattamento che provoca l'alterazione della frazione vetrosa abbondantemente presente nella pozzolana, sono tutti degli elementi di giudizio i quali lasciano adito alla supposizione che a seguito del trattamento in questione avvenga la zeolitizzazione del vetro suddetto.

E' noto infatti che le zeoliti costituiscono un gruppo particolare di silicati idrati, di origine idrotermale, che sono spesso collegati, nella loro paragenesi, con minerali postmagmatici ²⁰⁾.

Come si è visto in principio, E. NORIN ²¹⁾ sarebbe riuscito ad individuare nella frazione pelitica del tufo giallo napoletano un termine ad alto contenuto potassico della serie delle cabasiti, ed ha indicato come probabile la presenza della herschelite. Tuttavia le accurate indagini eseguite dal prof. SCHERILLO ²²⁾ non hanno portato a confermare l'esistenza di mi-

²⁰⁾ W. EITEL. L. c.

²¹⁾ E. NORIN. L. c.

²²⁾ A. SCHERILLO. L. c.

nerali zeolitici in quanto, al microscopio, non è possibile di risolvere la massa di fondo del tufo in questione, la quale appare isotropa.

Tale impossibilità deriva probabilmente dal fatto che l'herschelite, essendo molto debolmente birifrangente, non è identificabile all'esame ottico in sezione sottile ²³⁾.

Alla cortesia dello stesso prof. SCHERILLO dobbiamo un campione di herschelite proveniente da Aci-Castello ²⁴⁾, del quale abbiamo rilevato il röntgenogramma che è riportato nella tav. IV e nella tab. VII insieme con quello del tufo giallo tipico.

La coincidenza delle righe fondamentali dei due spettri è senz'altro evidente.

Come si è visto più avanti, il trattamento idrotermale eseguito in presenza di agenti chimici diversi dagli alcali, per le nostre condizioni di esperienza, e cioè lavorando a pressione e temperatura relativamente basse, non ha fornito gli stessi risultati del trattamento in ambiente alcalino, in quanto non si è riusciti, per questa via, ad ottenere dei materiali artificiali costituzionalmente simili al tufo giallo napoletano.

Resta quindi accertato che l'ambiente leggermente alcalino è condizione necessaria affinché il processo di alterazione del vetro pozzolanico volga verso la zeolitizzazione, e che nel nostro caso, cioè in presenza di potassa, la zeolite predominante è l'herschelite.

I risultati ottenuti trattando gli stessi materiali, nelle identiche condizioni, ma in presenza di NaOH, verranno descritti in una nota successiva.

Caratteristica specifica delle zeoliti è la loro capacità di scambio basico quando vengono cimentate verso soluzioni saline contenenti cationi di vario tipo.

A conferma quindi delle deduzioni su esposte circa la natura zeolitica della frazione cementante del tufo giallo napoletano, abbiamo esaminato sotto questo profilo il comportamento sia del su detto tufo sia quello del prodotto artificiale ad esso costituzionalmente simile, ricavato dalla pozzolana o dalle pomici per trattamento idrotermale nelle condizioni descritte in precedenza.

Si è operato come segue:

I materiali di esame (gr. 10), moliti fino a non lasciar residuo sul setaccio di 10.000 maglie/cm², sono stati posti in contatto con 800 cm³ di

²³⁾ C. HINZE. *Handbuch der Mineralogie*. Bd. II; pag. 1770; Lipsia 1897.

²⁴⁾ S. DI FRANCO. *Mineralogia Etna*. Catania, 1942, pag. 151. — V. CAGLIOTI. *Ricerche sulla composizione chimica della herschelite di Aci Castello*. Questo Rendiconto, [3], XXXIII, 156, (1927).

TABELLA VII.

Tufo giallo napoletano		Herschelite di Aci Castello	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
m	9,45	mf	9,42
mf	7,16	mf	7,15
m	5,52	ml	5,45
m	5,02	f	5,02
f	4,34	f	4,37
dd	4,12	mf	4,16
dl	3,60	ml	3,52
ff	3,19	ff	3,18
ff	2,93	ff	2,94
d	2,68	m	2,69
d	2,07	md	2,09
d	1,98	md	1,96
d	1,86	md	1,81
d	1,79	md	1,77
md	1,72	m	1,72

f = forte; ff = fortissima; m = media; mf = media forte; md = media debole; d = debole; dl = debole larga; dd = debolissima.

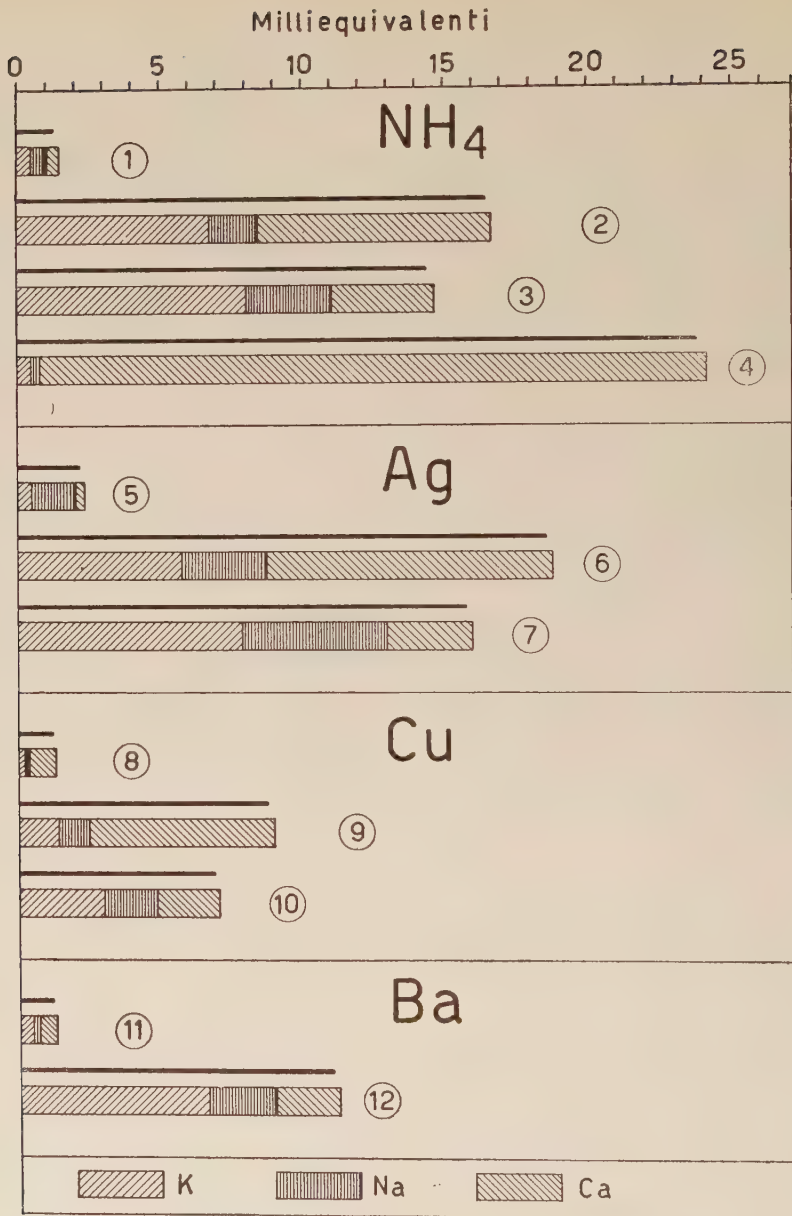


Fig. 3.

Rappresentazione dei risultati dello scambio basico, riportati in tab. VIII.
 La linea in grassetto rappresenta di volta in volta i milliequivalenti di: NH_4 ,
 Ag, Cu e Ba rimossi dalla soluzione di cemento. I numeri in circoletto indi-
 viduano il materiale saggio, che compare nella prima colonna della tab. VIII.



Tav. I.

Cu K

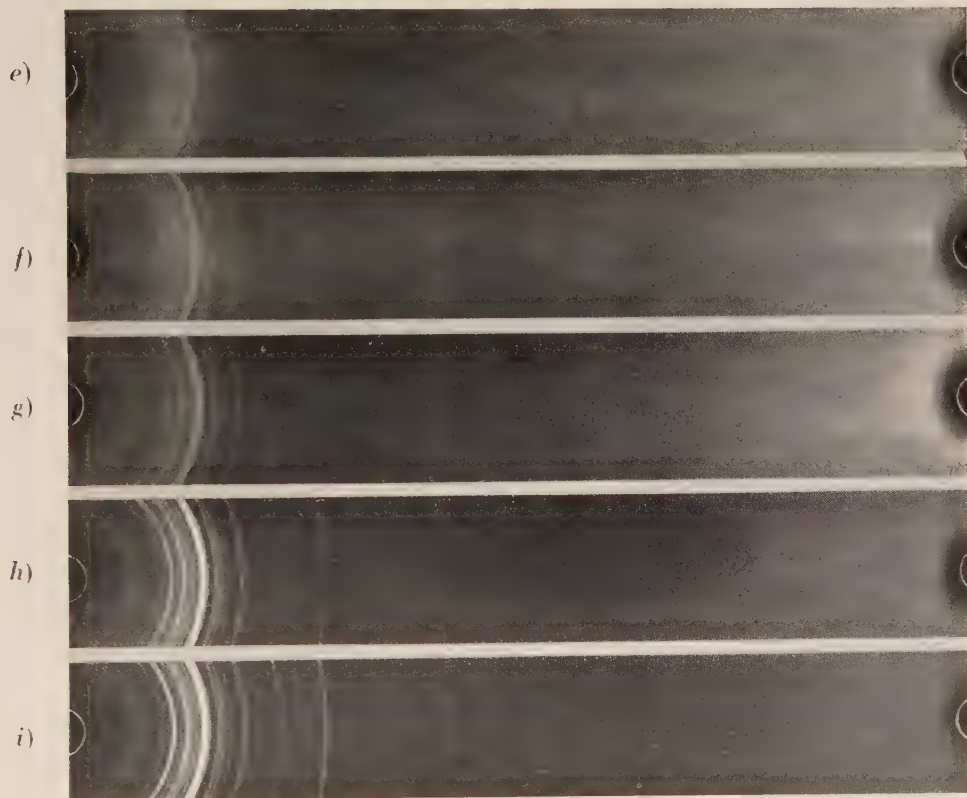
a) Ortoclasio.

b) Ossidiana.

c) Lapillo pomiceo.

d) Pozzolana.

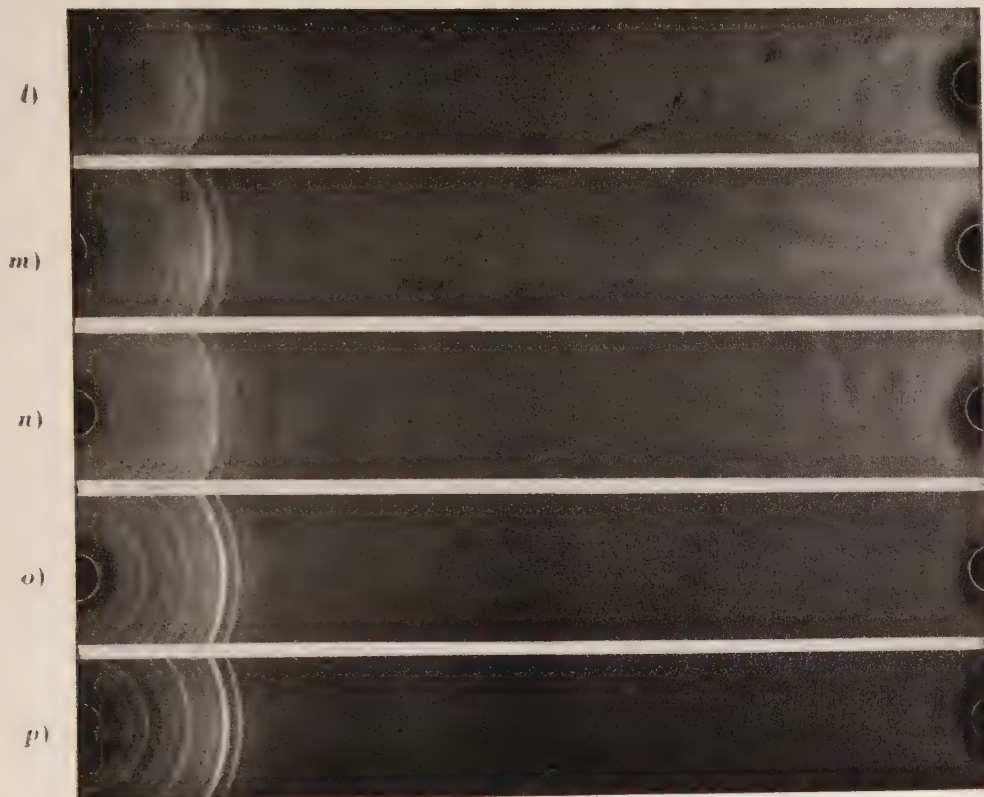
Gli spettrogrammi che compaiono in questa e nelle tavole successive, sono stati ottenuti adoperando una camera del diametro di mm. 114,59.



Tav. II.

Cu K

- e) Pozzolana chiara. — Residuo all'attacco acido-basico blando (con le modalità descritte nel corso del testo).
- f) Lapillo pomiceo. — Residuo all'attacco acido-basico blando.
- g) Tufo giallo napoletano. — Residuo all'attacco acido-basico blando.
- h) Tufo giallo napoletano. — Residuo all'attacco acido-basico secondo le Norme vigenti per l'accettazione delle pozzolane.
- i) Ortoclasio.



Tav. III.

Cu K

l) Pozzolana chiara.

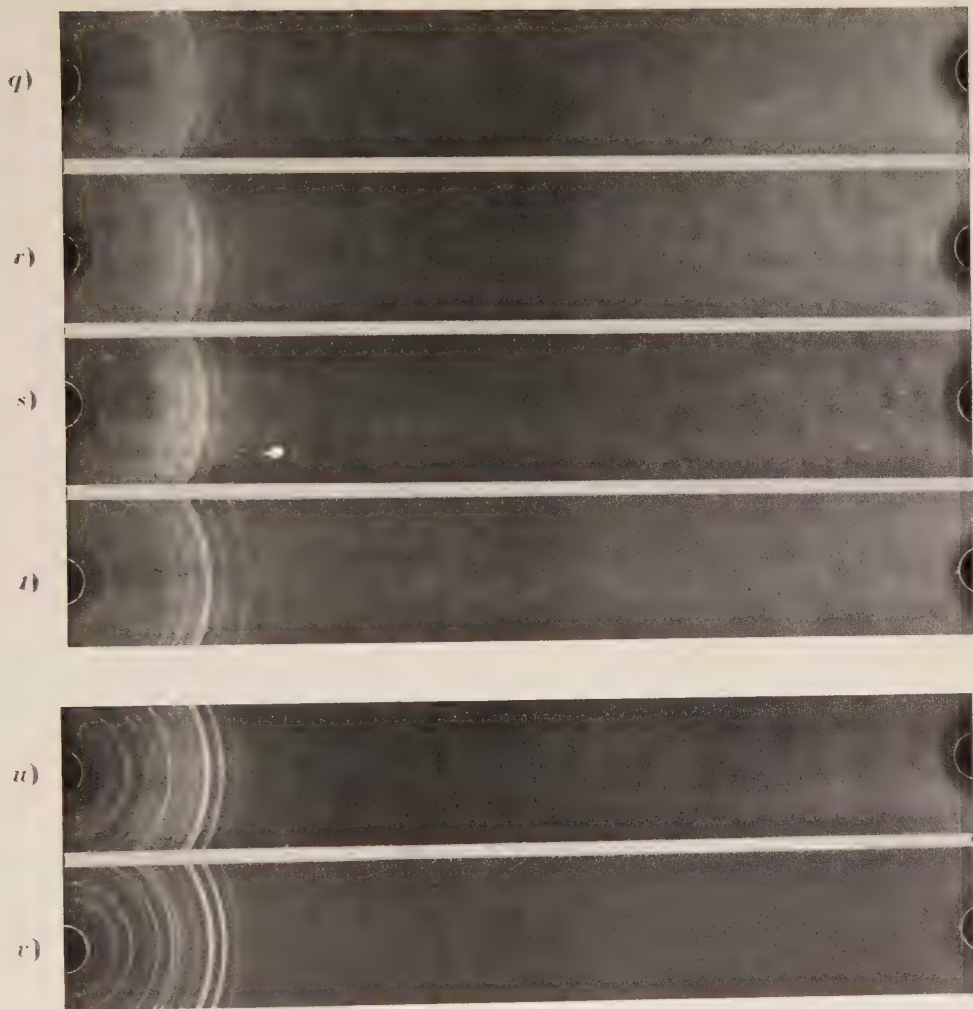
m) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 10 \text{ kg/cm}^2$; a $t = 178^\circ$ con soluzione di KOH all'1%.

n) Mappamonte.

o) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 30 \text{ kg/cm}^2$; $t = 235^\circ$, con soluzione di KOH all'1%.

p) Tufo giallo napoletano.

(Per gli spettrogrammi *m* ed *o*, cfr. tab. IV).



Tav. IV.

Cu K

- q) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 30 \text{ kg/cm}^2$; $t = 235^\circ$ con sola acqua distillata; per 30 ore.
- r) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale in condizioni analoghe a quanto sopra, ma in presenza di soluzione di HCl all'1%.
- s) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 140 \text{ kg/cm}^2$; $t = 311^\circ$, con soluzione di HCl all'1%, per sei ore.
- t) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 60 \text{ kg/cm}^2$; $t = 280^\circ$, per 60 ore.
- (Per gli spettrogrammi q) r) t), confronta la tab. IV; per s) cfr. tab. IX).
- u) Tufo giallo napoletano.
- v) Herschelite di Aci Castello.



T a v. V.

Cu K

z) Albite.

j) Ortoclasio.

w) Tufo giallo, dopo trattamento idrotermale a $p = 120 \text{ kg/cm}^2$, $t = 330^\circ$, con soluzione di KOH all'1%.

x) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale analogo a quello di cui sopra.

y) Pozzolana chiara, dopo trattamento idrotermale a $p = 200 \text{ kg/cm}^2$, $t = 376^\circ$, con soluzione di KOH al 3%.

(Per gli spettrogrammi w), x), y) cfr tab. IX).

ciascuna soluzione contenente la specie ionica di cui si desiderava effettuare lo scambio.

Si sono adoperate delle bottiglie di vetro di Jena le quali sono state mantenute in agitazione per l'intera durata della prova (circa 70 80 ore) e cioè fino a che la composizione della soluzione non è apparsa stabilizzata.

I cationi adoperati per lo scambio sono stati: NH_4^+ , Ag^+ , Cu^{++} , Ba^{++} , ed i risultati, espressi in milliequivalenti, sono riportati nella fig. 3 e nella tab. VIII.

Questi risultati mostrano che la capacità di scambio basico è posseduta in grado pressochè simile sia dal tufo naturale sia dal materiale artificiale ricavato dalle pozzolane e dalle pomici. Si conferma per tanto quanto era stato acquisito a mezzo delle indagini diffusamente illustrate in quel che precede, e cioè si conferma attraverso questa peculiare caratteristica, la natura zeolitica della massa di fondo del tufo giallo napoletano.

Si noti la facilità con la quale viene spostato il calcio contenuto originariamente nel tufo, indice questo che detto calcio è parte integrante del complesso zeolitico.

Abbiamo voluto mutare le condizioni dell'attacco idrotermale dei materiali di partenza innalzando la temperatura e la pressione, aumentando la durata del trattamento, nonchè salendo la concentrazione dell'alcali in soluzione.

Per le pressioni e le temperature indicate nella tab. IX si è osservato in primo luogo la scomparsa delle proprietà zeolitiche del materiale proveniente dal trattamento idrotermale.

Scompare lo spettrogramma caratteristico e ad esso se ne sostituisce uno nettamente diverso; l'acqua stabilmente legata diminuisce sensibilmente rispetto a quella riscontrata per i prodotti zeolitizzati; aumenta invece di molto il residuo insolubile all'attacco acido-basico eseguito secondo le modalità descritte in precedenza e fissate onde rendere omogeneo il confronto (tab. IX e X e tav. V).

Questo sostanziale mutamento delle proprietà lo si è osservato non soltanto per i prodotti dell'attacco delle pozzolane, delle pomici e dell'ossidiana, bensì per il tufo giallo e per il mappamonte.

Gli spettrogrammi riprodotti nella tav. V si riferiscono: (z) all'albite e (j) all'ortoclasio; (w) e (x) a tufo ed a pozzolana sottoposti allo stesso trattamento idrotermale a pressione e temperatura più elevate di quelle (vedi tab. IV) adottate per la zeolitizzazione, e lavorando con soluzione di KOH della medesima concentrazione.

Se, contemporaneamente alla temperatura ed alla pressione, si eleva

TABELLA VIII.

Capacità di scambio basico con soluzione di *cloruro ammonico*: (N/10 circa)

Materiale di partenza	Milliequivalenti di NH_4 rimossi dalla soluzione	Milliequivalenti passati nella soluzione			Totale milliequivalenti scambiati
		K	Na	Ca	
*)					
(1) Pozzolana	1,33	0,52	0,60	0,42	1,54
(2) Tufo giallo	16,47	6,81	1,71	8,15	16,67
(3) Pozzolana sottoposta a trattamento idrotermale **)	14,43	8,17	2,99	3,71	14,87
(4) Cabasite	23,81	0,49	0,30	23,40	24,19

Capacità di scambio basico con soluzione di *nitrato d'argento*: (N/10 circa)

Materiale di partenza	Milliequivalenti di Ag rimossi dalla soluzione	Milliequivalenti passati nella soluzione			Totale milliequivalenti scambiati
		K	Na	Ca	
(5) Pozzolana	2,21	0,51	1,62	0,31	2,44
(6) Tufo giallo	18,67	5,80	3,21	9,96	18,97
(7) Pozzolana dopo trattamento idrotermale **)	15,84	7,92	5,15	2,96	16,03

Capacità di scambio basico con soluzione di nitrato di rame: (N/15 circa)						
Materiale di partenza	Milliequivalenti di Cu rimossi dalla soluzione	Milliequivalenti passati nella soluzione			Totale milliequivalenti scambiati	
		K	Na	Ca		
(8) Pozzolana	1,2	0,22	0,11	0,92	1,28	
(9) Tufo giallo	8,73	1,44	1,16	6,40	9,00	
(10) Pozzolana dopo trattamento idrotermale **)	6,92	3,01	1,97	2,02	7,00	
Capacità di scambio basico con soluzione di cloruro di bario: (N/15 circa)						
Materiale di partenza	Milliequivalenti di Ba rimossi dalla soluzione	Milliequivalenti passati nella soluzione			Totale milliequivalenti scambiati	
		K	Na	Ca		
(11) Pozzolana	1,20	0,50	0,18	0,51	1,19	
(12) Pozzolana dopo trattamento idrotermale **)	11,17	6,68	2,42	2,25	11,35	

*) Con i numeri che compaiono fra parentesi in questa tabella, si individua la corrispondente rappresentazione dell'esperienza riportata in fig. 3.

**) Per la pozzolana sottoposta a trattamento idrotermale, cfr. tab. IV.

TABELLA IX.

C o n d i z i o n i d i e s p e r i e n z a					Caratteristiche del prodotto finale (sul secco a 105° C)	
Materiali naturali di partenza	Soluzione di contatto	Pressione (kg/cm ²)	Temperatura (° C)	Durata (ore)	Contenuto d'acqua stabil- mente legata %	Residuo all'attacco acido-basico %
Pozzolana chiara	H ₂ O	120	330	30	3,24	64,72
Lapillo pomiceo	H ₂ O	120	330	30	3,03	65,28
Ossidiana	H ₂ O	120	330	30	1,88	71,36
Tufo giallo napoletano	H ₂ O	120	330	30	3,39	63,82
Pozzolana chiara	HCl all'1 %	140	344	6	5,72	60,72
»	NH ₄ Cl al 0,5 % (in atmosfera di CO ₂)	100	288	6	4,42	61,60
»	NH ₄ Cl al 0,5 % (in atmosfera di CO ₂)	200	340	6	3,80	62,42
»	KOH all'1 %	120	330	6	3,28	59,02
»	»	200	376	24	2,61	60,73
»	KOH al 3 %	200	376	24	0,92	62,53
Lapillo pomiceo	KOH all'1 %	120	330	30	2,97	61,97
»	»	200	376	24	2,59	61,79
»	KOH al 3 %	200	376	24	0,79	63,41
Ossidiana	KOH all'1 %	120	330	30	1,64	73,13
Tufo giallo napoletano	KOH all'1 %	120	330	24	2,01	76,04

TABELLA X.

Capacità di scambio basico (milliequivalenti rimossi dalla soluzione)	Tufo giallo	Tufo giallo sottoposto a tratta- mento idrotermale (a feldspato)	Materiale proveniente dal trattamento idrotermale della pozzolana (a zeolite)	Materiale proveniente dal trattamento idro- termale della pozzo- lana (a feldspato)
NH ₄	16,47	1,01	14,43	0,92
Ag	18,67	—	15,84	1,67
Cu	8,73	—	6,92	0,71
Ba	14,31	0,94	11,17	1,26
Acqua perduta al di sopra di 105°C	9,11	2,01	7,39	0,92
Residuo insolubile all'attacco acido-basico	26,72	76,04	36,52	62,53

TABELLA XI.
(sul secco a 105°C.)

	K ₂ O %	Na ₂ O %	K ₂ O moli	Na ₂ O moli	K ₂ O/Na ₂ O	K ₂ O + Na ₂ O moli
Pozzolana di par- tenza	8,05	4,18	0,08547	0,06743	1,26	0,1529
Pozzolana dopo trat- tamento idrotermale alla pressione di 120 kg/cm ² , alla tempera- tura di 330°C, in pre- senza di KOH all'1 %.	10,1	3,04	0,1072	0,0490	2,18	0,1562
Pozzolana dopo trat- tamento idrotermale alla pressione di 200 kg/cm ² , alla tempera- tura di 375°C, in pre- senza di KOH al 3%.	12,95	1,70	0,1374	0,0274	5,01	0,1648

anche la concentrazione dell'alcali si ottiene lo spettro (γ) che è lo spettro dell'ortoclasio (j) della tav. V. Come era da aspettarsi, nel prodotto di reazione il rapporto: K_2O/Na_2O risulta spostato a favore di K_2O (vedi tabella XI).

Si è in tal modo conseguita la feldspatizzazione della massa di fondo, zeolitica, del tufo giallo napoletano, nonché del materiale ricavato dalla zeolitizzazione del vetro pozzolanico conseguita artificialmente a mezzo del trattamento idrotermale a temperatura e pressione opportune.

Si noti che sia la cabasite sia l'herschelite sottoposte allo stesso trattamento si feldspatizzano integralmente.

Non siamo ancora in grado di definire e attribuire lo spettro di raggi X riportato in tav. V, con la lettera (x). Abbiamo tuttavia in corso di esame il gruppo dei feldspati sodico-potassici, e ci auguriamo che i risultati di queste indagini portino il chiarimento desiderato.

Le indagini delle quali si è dato conto nel corso di questa nota non sono fine a loro stesse, non esauriscono cioè l'interessante argomento che è oggetto della medesima.

Infatti, come è stato accennato qua e là, taluni aspetti del processo di alterazione del vetro pozzolanico per azione del trattamento idrotermale, nonché del riassetto dei prodotti di neoformazione che dalla suddetta alterazione prendono origine, debbono essere ulteriormente chiariti.

Altri punti parimente tuttora in ombra non sono stati ricordati: ad esempio: l'evoluzione del ferro, il quale mentre è per buona parte contenuto allo stato ferroso nella pozzolana di partenza, lo si ritrova quasi totalmente allo stato ferrico nel tufo giallo napoletano.

Riteniamo infine di dover segnalare che quanto è stato da noi comunicato con la nota presente apre allo studioso un vasto campo di indagine che ci auguriamo fruttifero di risultati costruttivi.

Nel chiudere questa nota, compio il graditissimo dovere di ringraziare i proff. SCHERILLO e D'ERASMO per i suggerimenti e l'aiuto che in ogni momento mi hanno dato.

Napoli, Istituto di Chimica industriale dell'Università, giugno 1958.

SULL' INVARIANTE DI ZEUTHEN-SEGRE E SULLA DIFFERENZA
FRA LA CLASSE E L' ORDINE DI UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

Nota del socio ordinario Nicolò Spampinato

(Adunanza del di 6 novembre 1958)

Sunto. — Si dimostrano alcune formule per il calcolo della differenza fra la classe e l'ordine di una data superficie algebrica dell' S_3 , anche dotata di singolarità ordinarie e straordinarie, e si applicano tali formule per il calcolo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie. Alcune formole si riferiscono a superficie prive di curve multiple, altre a superficie anche dotate di curve multiple.

Premessa. — Data una superficie algebrica irriducibile dell' S_3 complesso, s'' , di ordine n e classe μ , con la generica sezione piana C_1^n di classe m , considerata come superficie completa, $F^{n,\mu}$ costituita dall'insieme delle sue ∞^2 coppie punto-piano tangente, ha assunto particolare importanza l'intero:

$$\eta = n + 2m + \mu,$$

che abbiamo indicato ¹⁾ come *ordine completo* della superficie s'' [perchè dà l'ordine di una varietà V_8 dell' S_{11} rappresentante, con $\infty^2 S_6$ generatori di cui è costituita, le ∞^2 coppie punto-piano tangente della superficie completa $F^{n,\mu}$]. Abbiamo invece indicato come ordine completo della curva piana C_1^n l'intero:

$$\eta_1 = n + m,$$

[perchè dà l'ordine di una varietà V_3 dell' S_5 complesso rappresentante, con i suoi ∞^1 piani generatori, le ∞^1 coppie punto-retta tangente costituenti la curva C_1^n completa $C_1^{n,m}$].

La differenza fra la classe μ e l'ordine n della superficie [indicata con a da GALLARATI] con il genere p_1 della C_1^n , interviene nell'espressione:

$$I = a - 4p_1$$

¹⁾ N. SPAMPINATO. *La varietà dell' S_{11} determinata da una superficie algebrica dell' S_3 complesso.* "La Ricerca", anno VI, n. 3, Napoli, Ist. Edit. del Mezzogiorno, 1955.

dell'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE della superficie s'' . D'altra parte indicando con σ_1 il carattere cuspidale della curva completa C_1'' [cioè la somma dei due *caratteri duali* della C_1'' che dànno il numero dei *punti doppi cuspidali* ed il numero dei *flessi* della C_1''], si ha una relazione che lega il genere p_1 ai due caratteri completi η_1 e σ_1 di C_1'' , si ha precisamente:

$$\sigma_1 - \eta_1 = 4(p_1 - 1).$$

Per avere delle formole che permettano di calcolare separatamente i caratteri α ed I , conviene considerare una seconda curva piana completa C_2'' di classe μ , che si ottiene con una generica sezione piana del cono tangente alla data superficie s'' con il vertice in un generico punto dell' S_3 ambiente, e quindi con l'ordine completo dato da:

$$\eta_2 = m + \mu,$$

legato al suo genere p_2 e carattere cuspidale σ_2 dalla relazione:

$$\sigma_2 - \eta_2 = 4(p_2 - 1).$$

Gli interi η_1 ed η_2 si diranno, nel seguito, *primo e secondo ordine completo curvilineo* della superficie s'' . Analogamente gli interi p_1 e p_2 si diranno *primo e secondo genere curvilineo* della superficie s'' , ed infine gli interi σ_1 e σ_2 si diranno *primo e secondo carattere cuspidale curvilineo*, della superficie s'' .

I quattro caratteri σ_1 , σ_2 , p_1 , p_2 relativi alle due *curve piane* C_1 e C_2 (determinate dalla superficie e dal cono tangente) assumono particolare importanza perchè permettono di calcolare i caratteri α , I ed η della superficie con formole *indipendenti dall'ordine n e dalla classe μ della superficie stessa completa*. Si hanno precisamente le formole:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\sigma_2 - \sigma_1) + 4(p_1 - p_2) \\ \eta = (\sigma_1 + \sigma_2) - 4(p_1 + p_2 - 2) \\ I = (\sigma_2 - \sigma_1) - 4p_2. \end{array} \right.$$

Si determinano anche delle formole nelle quali, in corrispondenza ad ogni punto multiplo P_i della superficie completa $F^{\mu, \mu}$, interviene un intero e_i che dà l'*abbassamento della classe μ della superficie s''* , indicato con *multiplicità completa* di P_i .

Si considerano, infine, delle formole nelle quali interviene l'ordine h della congruenza costituita dalle 2 *tangenti di flesso* della superficie s'' ,

con $n > 2$, ed il numero d delle *generatrici doppie* del cono tangente alla s'' , oltre ai particolari valori \bar{d} ed \bar{h} di d ed h rispondente al caso di una superficie \bar{s}'' priva di punti multipli.

1. Sia s'' una superficie algebrica irriducibile dell' $S_3(x_j)$ ($j = 1, \dots, 4$), di ordine n , di equazione:

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_4) = 0.$$

Associando alla (1) le due equazioni:

$$(2) \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

$$(3) \quad z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + z_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

si ha un sistema che rappresenta, nell' S_{11} complesso, in cui si assumono le 12 coordinate omogenee:

$$(4) \quad (x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4),$$

una varietà di cui fa parte una V_8^η , di ordine $\eta \leq n^3$, costituita da ∞^2 S_6 generatori determinati dalle ∞^2 coppie punto-piano tangente della *superficie completa luogo involuppo* determinata dalla s'' , che indicheremo con $F^{\mu, \mu}$, indicando con μ la classe di s'' .

Supposta la superficie priva di curve multiple, ma con un numero finito di singolarità, *ordinarie* o *straordinarie*, l'ordine η della V_8^η è dato da:

$$(5) \quad \eta = \mu - n + 2n^2,$$

ed assume il valore massimo n^3 se la s'' è priva di punti multipli, e quindi con la classe $\mu = n(n-1)^2$. La V_8 di ordine n^3 , in questo caso particolare, è l'intersezione delle tre ipersuperficie di ordine n di S_{11} rappresentate dalle tre equazioni di grado n (1), (2) e (3), nelle coordinate (4), che risulta irriducibile.

Se la s'' ha un numero finito di punti multipli, per ogni tale punto multiplo P_i si stacca dalla V_8 di ordine n^3 un S_8 contato c_i volte, se indichiamo con c_i l'abbassamento della classe μ della s'' , che interviene nella formola (5), determinato dal punto multiplo P_i . Sarà perciò $c_i \geq 2$. L'interno c_i si dirà, nel seguito, *multiplicità completa* di P_i per la *superficie completa* F , di ordine n e classe μ , dotata di un numero finito di punti multipli P_i . Sarà perciò, in tal caso la varietà V_8 di ordine n^3 rap-

presentata dal sistema (1), (2), (3), spezzata in una V_n^n con η dato dalla (5) e in i $S_8^{(i)}$ ciascuno contato c_i volte. Sarà pertanto:

$$(6) \quad \eta = n^3 - \sum c_i.$$

Posto, con GALLARATI,

$$(i) \quad a = \mu - n$$

per la (5) si ha:

$$(8) \quad a = \eta - 2n^2$$

e per la (6) si ha:

$$(9) \quad a = n^3 - 2n^2 - \sum c_i.$$

Si ha pertanto:

1) *La differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una superficie algebrica s' , dotata al più di un numero finito di punti multipli P_i , ciascuno abbassante la classe di c_i unità, rispondenti a singolarità ordinarie o straordinarie, è data dalla formula (9).*

2. Una curva piana algebrica irriducibile dell' $S_2(x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) di equazione

$$(10) \quad g(x_1, x_2, x_3) = 0$$

determina nell' S_5 complesso, in cui si assumono le sei coordinate omogenee

$$(11) \quad (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

una V_3 rappresentata dal sistema che si ottiene associando alla equazione (10) l'equazione

$$(12) \quad y_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0.$$

Se la curva è di ordine n la V_3 risulta di ordine n^2 , e di essa fa parte una V_3 di ordine $\eta_1 = n + m$, indicando con m la classe della curva, costituita da ∞^1 piani generatori determinati dalle ∞^1 coppie punto-retta tangente della *curva completa* luogo-inviluppo determinata dalla data curva luogo irriducibile. L'intero η_1 , detto ordine completo della curva, risulta $\leq n^2$ e raggiunge il massimo n^2 quando e solo quando la curva irriducibile è priva di punti multipli.

Da quanto precede segue che l'intero n'' (che interviene nelle formole (5) che dà l'ordine completo η della superficie s'' priva di curve multiple) è l'ordine completo η_1 della generica sezione piana di s'' , risultando una tale sezione irriducibile e priva di punti multipli. La (8), pertanto, dà la relazione :

$$(13) \quad a = \eta - 2\eta_1$$

che dà il carattere a in funzione dell'ordine completo η_1 della s'' e dell'ordine completo η_1 della generica sezione piana della s'' . E' bene notare che la (13) vale anche nel caso in cui la s'' sia dotata di curve multiple, nel qual caso l'ordine completo della generica sezione piana è dato da $\eta_1 = n + m$. Ciò segue dalla formola che dà η , nel caso generale, in funzione di n , m e μ :

$$(14) \quad \eta = n + 2m + \mu$$

invero sottraendo dalla (14) la relazione

$$(15) \quad 2\eta_1 = 2n + 2m$$

si ha

$$(16) \quad \eta - 2\eta_1 = \mu - n ,$$

cioè, per la posizione (7), la (13). Si ha pertanto :

II) *La differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una qualunque superficie algebrica irriducibile [data dalla (9) se è priva di curve multiple], è data dalla (13), essendo η l'ordine completo della superficie, ed η_1 l'ordine completo di una sua sezione piana.*

Si noti esplicitamente che dalla (16) segue che :

III) *Una superficie algebrica irriducibile dell' S_3 complesso ha l'ordine eguale alla classe quando e solo quando ha l'ordine completo eguale al doppio dell'ordine completo di una sezione piana.*

3. Intersecando la superficie algebrica irriducibile di equazione (1) con la polare di un generico punto $Y(y_j)$ di S_3 , di equazione (2), si ha una curva gobba di ordine $n(n-1)$, se la superficie è priva di curve multiple, e che proiettata da Y dà il cono tangente alla superficie con il vertice in Y . Secando con un piano tale cono si ha una curva di ordine $n(n-1)$ e di classe μ . Se la superficie è dotata di curve multiple queste si staccano, con molteplicità dipendente dalla natura di tali curve multiple, dalla curva gobba sezione della superficie con la superficie polare di Y , e si ha una curva residua gobba di ordine m e classe μ , con $m < n(n-1)$. In ogni caso resta determinata in un generico piano, oltre

alla sezione piana $C_1^{n,m}$ della superficie, di ordine n e classe m , la sezione $C_2^{m,\mu}$, di ordine m e classe μ , con il cono tangente alla superficie con il vertice nel punto Y fissato genericamente. Nel n° precedente abbiamo considerato l'ordine completo $\eta_1 = n + m$ di $C_1^{n,m}$. E' bene considerare anche l'ordine completo $\eta_2 = m + \mu$ della curva $C_2^{m,\mu}$. Tenendo conto della (14) si ha la relazione:

$$(17) \quad \eta = \eta_1 + \eta_2.$$

Chiamando η_1 ed η_2 *primo e secondo ordine completo curvilineo* della superficie si ha perciò:

IV) *L'ordine completo di una superficie algebrica irriducibile è uguale alla somma dei suoi due ordini completi curvilinei.*

4. Sottraendo membro a membro le due relazioni che danno η e $2\eta_2$ cioè la (14) e la

$$(18) \quad 2\eta_2 = 2m + 2\mu,$$

si ha la relazione

$$(19) \quad \eta - 2\eta_2 = n - \mu$$

e quindi, per la posizione (7), si ha:

$$(20) \quad \eta - 2\eta_2 = -a$$

e quindi oltre della (13), che dà a in funzione di η ed η_1 , abbiamo la formola

$$(21) \quad a = \eta_2 - \eta_1.$$

Si ha perciò:

V) *La differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una qualunque superficie algebrica irriducibile è uguale alla differenza fra il secondo ordine completo curvilineo η_2 ed il primo ordine completo η_1 della superficie.*

5. Indichiamo con p_1 e p_2 i generi delle due curve $C_1^{n,m}$ e $C_2^{m,\mu}$, di ordini completi η_1 ed η_2 . Indichiamo inoltre con σ_1 e σ_2 i caratteri cuspidali di tali due curve C_1 e C_2 . Sarà perciò:

$$(23)_1 \quad 4(p_1 - 1) = \sigma_1 - \eta_1$$

$$(23)_2 \quad 4(p_2 - 1) = \sigma_2 - \eta_2.$$

Inoltre se la C_1 ha i_1 flessi e k_1 cuspidi, e la C_2 ha i_2 flessi e k_2 cuspidi, si hanno le relazioni:

$$(24)_1 \quad \sigma_1 = i_1 + k_1$$

$$(24)_2 \quad \sigma_2 = i_2 + k_2$$

e le due relazioni $(22)_1$ e $(23)_2$ danno le due relazioni:

$$(25)_1 \quad 4(p_1 - 1) = i_1 + k_1 - n - m$$

$$(25)_2 \quad 4(p_2 - 1) = i_2 + k_2 - m - \mu.$$

Sottraendo dalla $(25)_1$ la $(25)_2$ si ha la relazione:

$$(26) \quad 4(p_1 - p_2) = k_1 - i_2 + (k_1 - k_2) + \mu - n$$

che dà la seguente nuova formola per il calcolo di $a = \mu - n$:

$$(27) \quad a = 4(p_1 - p_2) + (i_2 + k_2) - (i_1 + k_1).$$

Sommando le due relazioni $(25)_1$ e $(25)_2$ si ha la relazione:

$$(28) \quad 4(p_1 + p_2 - 2) = i_1 + i_2 + k_1 + k_2 - (\mu + 2m + n)$$

e quindi per la (14) si ha la seguente nuova formola per il calcolo dell'ordine completo η della superficie s^n :

$$(29) \quad \eta = (i_1 + i_2 + k_1 + k_2) - 4(p_1 + p_2 - 2).$$

Le relazioni (27) e (29) per il calcolo di a e di η , tenendo conto delle posizioni $(24)_1$ e $(24)_2$, o delle relazioni $(23)_1$ e $(23)_2$, danno le relazioni:

$$(27') \quad a = (\sigma_2 - \sigma_1) + 4(p_1 - p_2)$$

$$(29') \quad \eta = (\sigma_1 + \sigma_2) - 4(p_1 + p_2 - 2).$$

Raccogliendo si ha:

VI) La differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una qualunque superficie algebrica irriducibile s^n dell' S_3 complesso, e l'ordine completo $\eta = n + 2m + \mu$ della superficie stessa, con la sezione piana $C_1^{m,\mu}$ e la sezione piana del cono tangente $C_2^{m,\mu}$, sono dati dalle formole (27') e (29'), in funzione dei generi p_1 , p_2 e di caratteri cuspidali σ_1 , σ_2 di dette due curve piane $C_1^{m,\mu}$ e $C_2^{m,\mu}$, o dalle formole (27) e (29), equivalenti alle (27') e (29') per le relazioni $(24)_1$ e $(24)_2$ che esprimono σ_1 e σ_2 in funzione del numero di flessi e di cuspidi di C_1 e C_2 rispettivamente.

NOTA. — E' bene notare esplicitamente che *nelle suddette formole* per il calcolo dei caratteri α ad η della superficie s'' , *non interviene l'ordine n della superficie stessa*. Nel n° seguente vedremo come pure l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie s'' , si può calcolare con una formola in cui non interviene l'ordine n della superficie.

Si noti che dalla (29') si ricava la relazione :

$$(29'') \quad \eta - 8 = (\sigma_1 + \sigma_2) - 4(p_1 + p_2)$$

che mette in evidenza che nel caso $n = 2$ è $\eta = 8$, perchè il secondo membro risulta nullo, essendo le curve $C_1^{n,m}$ e $C_2^{m,\mu}$ due coniche e quindi col genere e il carattere cuspidale nulli.

6. L'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE delle superficie s'' è dato da :

$$(30) \quad I = \mu - n - 4p_1$$

in funzione dell'ordine n della classe μ e dal genere p_1 della sezione piana $C_1^{n,m}$ di s'' . Per la posizione (7) si ha perciò la relazione :

$$(31) \quad I = a - 4p_1.$$

Per la (13) si ha pure la relazione :

$$(32) \quad I = \eta - 2\eta_1 - 4p_1.$$

Per la relazione (22) dalla (31) si ricava pure la relazione :

$$(33) \quad I = (\eta_2 - \eta_1) - 4p_1.$$

Tenendo conto che per la (23), risulta

$$(34) \quad 4p_1 = \sigma_1 - \eta_1 + 4,$$

dalle due relazioni (32) e (33) si ricavano le relazioni :

$$(35) \quad I = \eta - \eta_1 - \sigma_1 - 4$$

$$(36) \quad I = \eta_2 - \sigma_1 - 4.$$

E' bene notare che le due relazioni (33) e (36) equivalgono alla seguente formola che dà l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I della s'' *indipendente dall'ordine n della superficie* :

$$(37) \quad I = m + \mu - i_1 \quad k_1 - 4.$$

Si ha perciò :

VII) *L'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I di una superficie algebrica irriducibile s^n , dall' S_3 complesso, è dato dalla formola (37), in funzione della classe μ della superficie e della classe m , numero di flessi i_1 , numero di cuspidi k_1 di una sezione piana C_1 della superficie stessa. La (37) equivale sia alla (35), sia alla (36).*

NOTA. — Sostituendo nella (31) al carattere a l'espressione (27') del n° precedente, che dà a in funzione dei generi e dei caratteri cuspidali di $C_1^{n,m}$ e $C_2^{m,\mu}$, si ottiene la formola:

$$(38) \quad I = (\tau_2 - \sigma_1) - 4p_2.$$

Sommando membro a membro questa relazione con la (33) e dividendo per 2 si ha la formola:

$$(39) \quad I = \frac{1}{2} [(\eta_2 + \sigma_2) - (\eta_1 + \sigma_1) - 2(p_1 + p_2)].$$

In corrispondenza alle due curve algebriche piane C_1 e C_2 conviene fare le due posizioni:

$$(40)_1 \quad q_1 = \eta_1 + \sigma_1 = n + m + i_1 + k_1$$

$$(40)_2 \quad q_2 = \eta_2 + \sigma_2 = m + \mu + i_2 + k_2$$

Ne segue dalla (39) la formola:

$$(39) \quad I = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) - 2(p_1 + p_2)$$

che dà l'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE della superficie s^n in funzione dei caratteri p_1, q_1 di $C_1^{n,m}$ e p_2, q_2 di $C_2^{m,\mu}$, con una formola completamente simmetrica rispetto a queste due curve sezioni piane della superficie e di un suo cono tangente.

7. Indichiamo con h l'ordine della congruenza costituita dalle ∞^2 tangenti di flesso della superficie algebrica irriducibile s^n , con $n > 2$. Diciamo d il numero delle *generatrici doppie* del cono tangente alla s^n . La curva piana $C_2^{m,\mu}$ intersezione piana di tale cono sarà dotata, pertanto, di d punti doppi nodali ed h punti doppi cuspidali secati nel piano della C_2 dalle h tangenti di flesso alla s^n uscenti dal vertice del cono tangente (rette che saranno le h *generatrici di regresso* di detto cono).

Segue che la $C_2^{m,\mu}$, di ordine m e classe μ , ha la classe μ data dalla formola:

$$(41) \quad \mu = m(m-1) - 2d - 3h.$$

La (41) dà la classe μ della superficie s^n in funzione della classe m di una sezione piana $C_1^{n,m}$ di s^n , del numero d delle generatrici doppie, ed h delle generatrici di regresso, del cono tangente ad s^n .

Nell'ipotesi che la s^n sia dotata al più di un numero finito di punti multipli, la generica sezione piana $C_1^{n,m}$ risulta priva di punti multipli, e quindi con la classe m data da $n(n-1)$. In questo caso si ha

$$\begin{aligned} (42) \quad m(m-1) &= n(n-1)(n(n-1)-1) \\ &= (n^2-n)(n^2-n-1) \\ &= (n^2-n)^2 - n^2 + n \\ &= n^4 - 2n^2 + n. \end{aligned}$$

In questo caso, pertanto, la (41) dà:

$$(43) \quad \mu = n^4 - 2n^2 + n - 2d - 3h.$$

Segue per il calcolo di $a = \mu - n$ la formola:

$$(44) \quad a = n^3(n-2) - (2d + 3h).$$

Si ha perciò:

VIII) La differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una superficie algebrica s^n irriducibile priva di curve multiple, col cono tangente con d generatrici doppie ed h generatrici di regresso, è data dalla formola (44), essendo la classe μ data dalla formola (43).

8. Le proposizioni I) e VIII), relative alla differenza a fra la classe μ e l'ordine n di una superficie s^n priva di curve multiple, e quindi dotata al più di un numero finito di punti multipli P_i , danno il carattere a con le due formole che qui riportiamo:

$$(9) \quad a = n^2 - 2n^2 - \sum c_i$$

$$(44) \quad a = n^3(n-2) - (2d + 3h),$$

la prima in funzione dell'ordine n e delle molteplicità complete c_i dei punti multipli P_i , la seconda in funzione di n e dei caratteri d ed h del cono tangente (o della sua sezione piana $C_2^{m,\mu}$). Sottraendo dalla seconda la prima si ha l'equazione, a cui devono soddisfare i caratteri c_i , d ed h , lineare, a coefficienti interi fissi, ed il termine noto intero dipendente dall'ordine n della s^n , si ha precisamente:

$$(45) \quad \sum c_i - 2d - 3h + (n^4 - 3n^3 + 2n^2) = 0.$$

Nel caso particolare che la superficie s'' sia una superficie \bar{s}'' priva di punti multipli con il cono tangente con d generatrici doppie ed \bar{h} generatrici di regresso, tali caratteri sono dati, in funzione di n , dalle formole:

$$(46) \quad \bar{d} = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(47) \quad \bar{h} = n(n-1)(n-2).$$

Tali caratteri \bar{d} ed \bar{h} della \bar{s}'' priva di punti multipli soddisfano all'equazione (45) perchè si ha, effettivamente, qualunque sia n ,

$$(48) \quad -2\bar{d} - 3\bar{h} + (n^4 - 3n^3 - 2n^2) = 0,$$

come si verifica per sostituzione dei valori \bar{d} ed \bar{h} dati dalle formole (46) e (47).

Sottraendo dalla (45) l'identità (48) si ha l'equazione:

$$(49) \quad \sum c_i + 2(\bar{d} - d) + 3(\bar{h} - h) = 0$$

mediante la quale si ricava la formola:

$$(50) \quad \sum c_i = 2(d - \bar{d}) + 3(h - \bar{h})$$

che dà la somma delle molteplicità complete dei punti multipli P_i della s'' in funzione dell'aumento $d - \bar{d}$ e dell'aumento $h - \bar{h}$ del numero delle generatrici doppie e di regresso del cono tangente, quando dalla superficie generale s'' , priva di punti multipli, si passa alla superficie s'' , dello stesso ordine n , con un numero finito di punti multipli P_i , di molteplicità complete c_i .

La formola che dà tale somma delle molteplicità complete c_i , in funzione dei caratteri d ed h , si ricava dalla (45), ed è:

$$(51) \quad \sum c_i = 2d + 3h - N,$$

dove s' è posto:

$$(52) \quad N = n^4 - 3n^3 + 2n^2.$$

Raccogliendo si ha:

IX) La somma delle molteplicità complete c_i dei punti multipli P_i di una superficie algebrica s'' , dotata di un numero finito di punti multipli, è data dalla formola (51), con d ed h numero delle generatrici doppie e di regresso del cono tangente alla s'' . Tale somma è data pure dalla formola (50), con $d - d$ ed $h - \bar{h}$ aumento del numero delle generatrici doppie e di regresso del cono tangente quando dalla superficie s'' , priva di punti multipli, si passa alla superficie s'' , con i detti punti multipli P_i . I caratteri d ed \bar{h} sono dati, in funzione di n , dalle formole (46) e (47).

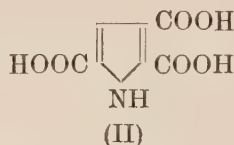
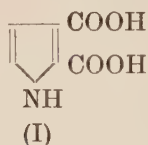
ACIDO 2,3,4,5-PIRROLTETRACARBONICO NELL'OSSIDAZIONE
DELLA MELANINA DI SEPPIA

*Nota del socio corr. Rodolfo Alessandro Nicolaus
e dei dottori Achille Vitale e Mario Piattelli*

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. — Proseguendo lo studio chimico della melanina di seppia viene identificato, cromatograficamente, fra i prodotti di degradazione con H_2O_2 in ambiente di acido acetico un nuovo frammento: l'acido 2,3,4,5-pirroltetracarbonico.

Per ossidazione con H_2O_2 in ambiente alcalino della melanina di seppia si ottengono, come è noto (1), gli acidi 2,3-pirroldicarbonico (I) e 2,3,5-pirroltricarbonico (II).



Riferiamo ora sull'ossidazione con H_2O_2 in ambiente di CH_3COOH .

Come prodotto di partenza è stato usato del nero di seppia ottenuto per svuotamento meccanico delle borse e conservato per circa 2 mesi in HCl 1 : 1.

Prima dell'uso il pigmento è stato lavato con acqua distillata fino a scomparsa della reazione acida, poi con alcool a 95° e quindi essiccato sotto vuoto su P_2O_5 .

La miscela di ossidazione, costituita da acido acetico glaciale e acqua ossigenata al 36 %, in volumi eguali, è stata aggiunta, a temperatura ambiente, alla melanina di seppia finemente macinata, sotto agitazione; tale aggiunta, regolata in base alla presenza di acqua ossigenata nella sospensione, è stata in media di 40cc. di miscela ossidante per grammo di melanina.

La reazione è all'inizio rapida ed esotermica, la soluzione si colora in bruno-arancione, e la melanina passa gradualmente in soluzione in un tempo dipendente dal rapporto tra le quantità di melanina e di miscela ossidante. Il passaggio in soluzione è in media completo entro 7 giorni per quantità di melanine eguali a un grammo.

A fine ossidazione si elimina l'eccesso di acqua ossigenata facendo gorgogliare anidride solforosa sotto raffreddamento, si concentra sotto vuoto, e si estrae prima con etere e poi con acetato di etile.

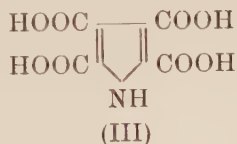
Gli estratti vengono seccati su MgSO_4 per una notte e poi evaporati a secchezza sotto vuoto.

L'estratto etero lascia come residuo un solido giallo-bruno che sciolto in NH_4OH al 3% viene cromatografato su carta WHATMAN N. 1.

Come rivelatore si usa il diazo dell'acido solfanilico come altre volte descritto (2), e come fase mobile propanolo- NH_3 33% - H_2O (60:30:10) (3).

Il cromatogramma presenta numerose macchie di diverso colore, tra cui quattro intensamente colorate in rosso-viola.

Usando come paragone campioni autentici, due di queste macchie si identificano con i noti acidi I e II e una terza con un nuovo acido: l'acido 2,3,4,5-pirroltetracarbonico (III).



La quarta macchia non è stata per ora identificata.

Sempre usando campioni autentici di acidi pirrolici l'acido (III) può essere riconosciuto usando le fasi mobili:

- a) - Propanolo - NH_3 33% - H_2O
(80) (4) (16)
- b) - Etanolo - NH_3 33% - H_2O
(80) (4) (16)
- c) - Butanolo - Etanolo - NH_3 33% - H_2O
(40) (40) (4) (16)

o per cromatografia bidimensionale con:

- d) - Butanolo - Acido acetico - H_2O
(40) (10) (50)
Butanolo - NH_3 2 N
(1) (1)
- e) - Propanolo - NH_3 33% - H_2O
(60) (30) (10)
Butanolo - Acido acetico - H_2O
(40) (10) (50)

Simili risultati si ottengono anche dall'estratto con acetato di etile con l'unica differenza che in questo estratto l'acido (III) si trova in maggior quantità.

Per quanto riguarda l'isolamento chimico dell'acido (III) e il suo significato strutturistico, sono in corso delle indagini sulle quali verrà riferito prossimamente.

Napoli, Istituto di Chimica Organica, Novembre 1958.

BIBLIOGRAFIA

- [1] PANIZZI L. e NICOLAUS R. A. *Ricerche sulle melanine*. Nota I. *Sulla melanina di seppia*. « Gazz. Chim. Ital. », 82, 435, 1952. — NICOLAUS R. A. e MANGONI L. *Sugli acidi pirrolicarbonici*. Nota IV. *Cromatografia su carta degli acidi pirrolicarbonici e applicazione allo studio dei pigmenti neri*. « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1397, 1955. — NICOLAUS R. A. *Cromatografia su carta dei prodotti di demolizione con H_2O_2 di melanine naturali e della tirosinomelanina*. « Gazz. Chim. Ital. », 85, 659, 1955. — NICOLAUS R. A. e CAGLIOTI L. *Ricerche di acidi pirrolici nelle miscele di ossidazione*. « Ricerca Scientifica », Anno 27°, n. 1, gennaio 1957.
- [2] NICOLAUS R. A. e MANGONI L. *Sugli acidi pirrolicarbonici*. Nota VII. *Comportamento chimico e cromatografico di acidi C-metil-pirrol-carbonici*. « Ann. Chimica », 46, 847. 1956.
- [3] BINNS F. and SWAN G. A. *Oxidation of some synthetic melanins*. « Chem. and Ind. ». March 30, 1957, p. 396.

REAZIONI DEI CHETENI - NOTA III - AZIONE DEL FENILISOCIANATO
SUL FENILCHETENE-DIMETILACETALE E SUL CHETENE-DIETILACETALE

*Nota della dott. Rachele Scarpati,
presentata dal socio corr. Rodolfo Alessandro Nicolaus*

(Adunanza del dì 15 novembre 1958)

Sunto. - La reazione del fenilisocianato con gli acetali dei cheteni procede con probabile formazione di un ciclo malonimmidico nel caso del fenilchetene-dimetilacetale e formazione di una malonilurea nel caso del chetene-dietilacetale. Per la prima volta viene descritto un derivato acetalico di quest'ultimo oxoeterociclo.

La maggiore stabilità dei cheteni-acetali rispetto ai cheteni ed il loro carattere spiccatamente nucleofilo, dimostrato precedentemente [1], ci ha suggerito l'uso di questi ultimi in quei casi per i quali l'uso dei cheteni, a prevalente carattere elettrofilo, non porta a buoni risultati. In questa nota riferiamo sulle reazioni del fenilchetene-acetale e del chetene-acetale con fenilisocianato; quest'ultimo composto, nettamente elettrofilo [2], reagisce infatti addittivamente con il difenilchetene, come è stato dimostrato da STAUDINGER [3], solo in condizioni molto drastiche, mentre con il dimetilchetene porta alla formazione di polimeri ad elevato peso molecolare [4].

Riscaldando fra 85° e 95° quantità equimolecolari di fenilchetene-dimetilacetale (I) e di fenilisocianato (II) si ottiene, con resa del 75 %, una massa di cristalli che, ricristallizzati da benzolo anidro, si presentano in aghi bianchi a p. f. 133-138°. Lo stesso prodotto si ottiene operando con due equivalenti di isocianato; esso, anche nelle più blande condizioni di idrolisi, si trasforma nell'anilide del fenilmalonato di metile (VI) [5]. Nel caso che la saponificazione venga effettuata con HCl conc. a freddo o con alcali a caldo si ottiene, accanto a notevoli quantità di estere (VI), la monoanilide dell'acido fenilmalonico (VII). Questo acido che cristallizza da acetato di etile e benzina in aghi a p. f. 120-122° con dec. si trasforma, per metilazione con diazometano, nell'estere (VI), mentre per riscaldamento alla temperatura di fusione si decarbossila a fenilacetanilide. L'acido (VII) può essere ottenuto anche dall'estere (VI) per trattamento con HCl conc. a freddo.

Per idrogenazione catalitica, a pressione e temperatura ambiente, (catalizzatore nichel-Raney) il prodotto a p. f. 133-138° assorbe rapidamente una mole di idrogeno con formazione di un prodotto neutro, poco solu-

bossifenilchetene-dimetilacetale (IV). Quest'ultimo, capace di esistere in due forme tautomere, deriverebbe dalla trasposizione di un idrogeno nell'anfione (III).

In modo nettamente diverso da quello ora descritto per la reazione fra fenilisocianato e fenilchetene-acetale procede la reazione analoga con

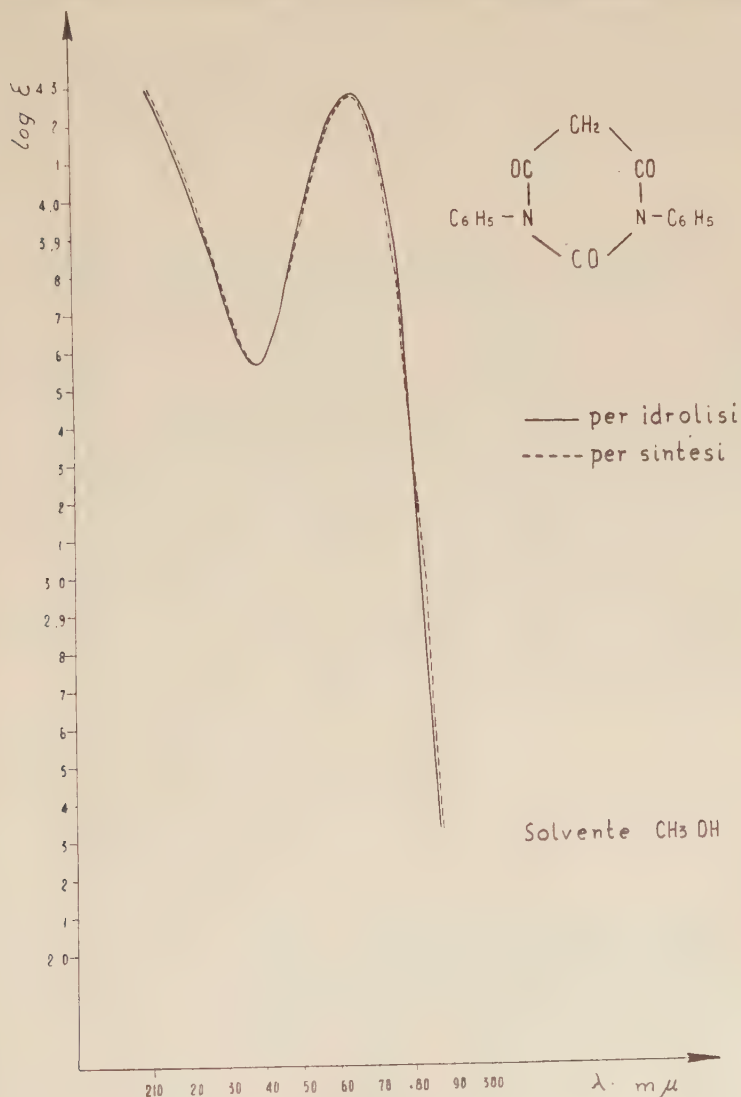
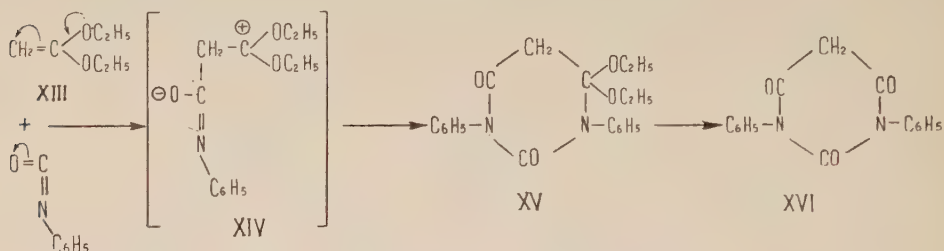


Fig. 1.

chetene-dietilacetale (XIII): in questo caso due molecole di fenilisocianato reagiscono con una di chetene-acetale. Si ottiene così un prodotto che, cristallizzato da benzolo, si presenta in aghi bianchi a p. f. 147-149°. Questo è insolubile a freddo in NaOH anche concentrato; per azione di HCl

al 15 % si trasforma lentamente in una sostanza a carattere acido, identificata attraverso punto di fusione in miscela e spettro U. V. (Fig. 1) con l'acido 1,3-difenilbarbiturico (XVI) [7]. Al prodotto si può quindi attribuire la formula di 1,3-difenil 6,6-dietossimalonilurea (XV).



La netta differenza di comportamento fra il chetene-acetale ed il fenilchetene-acetale nella reazione con fenilisocianato porta ad ammettere una grande influenza sull'andamento della reazione stessa del sostituente sul carbonio α del chetene-acetale. Si può pensare che la reazione si svolga, in ambedue i casi considerati, attraverso un primo attacco elettrofilo dell'isocianato, con formazione di un intermedio del tipo (III) e (XIV): se si ammette questo, il diverso comportamento nel successivo procedere della reazione può essere imputato all'influenza mesomerica del fenile ovvero alla presenza di due idrogeni sullo stesso carbonio.

Non è tuttavia possibile, nel quadro del presente lavoro, formulare ipotesi fondate: sono in corso ulteriori ricerche sul comportamento di cheteni-acetali diversamente sostituiti ed atte ad approfondire l'esame della struttura del prodotto a p. f. 133-138°.

PARTE SPERIMENTALE

Reazione fra fenilisocianato e fenilchetene-dimetilacetale: Prodotto (IV) o (V).

Per aggiunta di gr. 2,4 (0,02 moli) di fenilisocianato a gr. 3,3 (0,02 moli) di fenilchetene-dimetilacetale (I) [8] si forma un liquido omogeneo che viene riscaldato per 3 ore a 85-95°. Dopo 12 ore di riposo a temperatura ambiente, si filtra rapidamente il solido che si è separato e lo si lava con poco benzolo anidro. Si ottengono gr. 4,3 (resa del 75 % circa) di un prodotto insolubile sia negli acidi che nelle basi che, ricristallizzato da benzolo anidro, si presenta in aghi a p. f. 133°-138°.

Analisi: trov. %: C 71,89; H 6,15; N 4,16; OCH_3 21,73;
 per $\text{C}_{17}\text{H}_{17}\text{O}_3\text{N}$ calc. %: 72,06; 6,05; 4,95; 21,90.

Peso molecolare: trov. (crioscopia in benzolo) 287;
 calc. per $\text{C}_{17}\text{H}_{17}\text{O}_3\text{N}$ 283.

Questa sostanza, solubile in alcool e acetato di etile, poco solubile in etere, già per cristallizzazione da benzolo non perfettamente anidro presenta un notevole abbassamento della temperatura di fusione. Tenuta a ricadere per 5 ore in solventi non anidri (diossano, benzolo, metanolo) si trasforma quantitativamente in anilide del fenilmalonato di metile (VI) a p. f. 109° [5].

Per saponificazione in ambiente alcalino si ottengono, in percentuale diversa, a seconda delle condizioni, miscele di estere (VI) e di acido (VII), mentre per riscaldamento a bagno maria con HCl conc. o con H₂SO₄ al 50 % si ottengono acido fenilacetico, anilina e CO₂.

Azione del HCl conc. sull'acetale a struttura (IV) oppure (V): *Monoanilide dell'acido fenilmalonico* (VII).

Gr. 2 del prodotto a p. f. 133-138°, precedentemente preparato, finemente polverizzati sono spappolati con 10 cm³ di HCl conc.. Dopo 2 o 3 giorni si filtra dopo diluizione con acqua e il solido separato si tratta con NaHCO₃; la soluzione alcalina, lavata con etere, viene acidificata.

Si ottengono gr. 0,5 di un solido bianco, che cristallizzato da acetato di etile e benzina si presenta in aghi a p. f. 120-122° dec.. Il prodotto è poco solubile in acqua, etere, benzina, tetracloruro di carbonio, ligroine; solubile in metanolo, acetato di etile, diossano.

Analisi:	trov. %:	C 70,34;	H 5,43;
	per C ₁₅ H ₁₃ O ₃ N calc. %:	70,58;	5,13.

lo stesso prodotto può essere ottenuto applicando il procedimento descritto all'anilido estere (VI).

50 mg. del prodotto a p. f. 120-122° riscaldati per 15 minuti in bagno a 120-130° si decompongono con sviluppo di CO₂. Il residuo ripreso con NaHCO₃, filtrato e cristallizzato da alcool è stato identificato, mediante p. f. in miscela, come fenilacetanilide.

100 mg. del prodotto a p. f. 120-122° in soluzione metanolica si trattano con porzioni di una soluzione eterea di diazometano fino a persistente colorazione gialla. Per evaporazione dei solventi nel vuoto si ottiene un solido che è stato identificato mediante p. f. in miscela come l'estere (VI).

Idrogenazione catalitica dell'acetale a struttura (IV) oppure (V): *α formilfenilacetanilide* (VIII)

gr. 2 del prodotto a p. f. 133-138° sciolti in metanolo anidro, sono sottoposti a riduzione catalitica, a pressione e temperatura ambiente, in presenza di gr. 2 di nichel-Raney. Terminato l'assorbimento dell'idrogeno (1 mole),

si filtra il catalizzatore e si allontana a bassa pressione il solvente; si ottiene, con resa dell'80 %, un prodotto bianco, neutro, insolubile in acqua, poco solubile in etere e metanolo, solubile in diossano, che cristallizza in aghi da tetracloruro di carbonio e presenta p. f. 157-160°.

Analisi: trov. %: C 71,08; H 6,89; N 5,16; OCH₃ 21,00;
 per C₁₇ H₁₉ C₃ N calc. %: 71,56; 6,71: 4,91; 21,75.

Il formilacetale (VIII) resiste all'azione degli acidi diluiti e dagli alcali; con HCl conc. sotto agitazione per 40-48 ore a temperatura ambiente, si trasforma quantitativamente in un prodotto a p. f. 227-228°, identificato, per le sue proprietà, come 2-ossi-3-fenilchinolina (X) [6].

Il prodotto (VIII) non reagisce con fenilidrazina nè con semicarbazide. Per prolungato riscaldamento con fenilidrazina cloridrato in soluzione idroalcolica, a ricadere, si ottiene un prodotto solubile in Na₂ CO₃ a p. f. 194-195° che è stato identificato, per le sue proprietà come 1,4-difenilpirazalone-5 (XII).

Reazione fra fenilisocianato e chetene-dietilacetale: 1,3-difenil-6,6-dietossimalonilurea (XV).

Si aggiungono gr. 4,8 (0,04 moli) di fenilisocianato a gr. 2,3 (0,02 moli) di chetene-dietilacetale (XIII) [9] e si riscalda la miscela di reazione a 85-95° per 3 ore. Dopo riposo di 12 ore si filtra rapidamente il solido che si è separato e lo si lava con poco benzolo anidro. Si ottengono gr. 4,2 (resa del 60 % circa) di un prodotto che, cristallizzato da benzolo, si presenta in aghi bianchi insolubili in acqua e in NaOH, poco solubili a freddo nei comuni solventi organici, a p. f. 147-149°.

Analisi: trov. %: C 67,73; H 6,35; N 8,20; OC₂H₅ 24,40;
 per C₂₀H₂₂C₄N₂ calc. %: 67,78; 6,26; 7,90; 25,27.

Peso molecolare: trov. (ebullioscopia in CCl₄) 336;
 calc. per C₂₀ H₂₂ O₄ N₂ 354.

Tenuto sotto agitazione con HCl al 15 %, a temperatura ambiente per 24 ore, il prodotto a p. f. 147-149° si trasforma, con rese del 90 %, in un prodotto solubile in Na₂ CO₃ 2N a p. f. 237-238° che è stato identificato, mediante punto di fusione misto e spettro U. V., con l'acido 1,3-difenilbarbiturico (XVI) ottenibile da acido malonico e difenilurea [7] (Fig. 1).

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università, Novembre 1958.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SCARPATI R. e SPERONI G. *Reazioni dei cheteni*. Nota I. *Reazione tra nitrilossidi e cheteni-acetali: sintesi degli acetali degli isossazoloni-5*. « Gazz. Chim. Ital. », in corso di stampa.
- [2] ARNOLD R. G., NELSON J. A. and VERBANC J. J. *Recent advances in isocyanate chemistry*. « Chem. Rev. », **57**, 47, (1957).
- [3] STAUDINGER H., GOEHRING O. und SCHOELLER M. *Ketene XXV. Ueber die Einwirkung von Saeurechloriden auf Diphenylketen*. « Ber. », **47**, 41, (1914), per riscaldamento del fenilisocianato con difenilchetene a 220° per 5 ore ottennero l'1,3,3-trifenil-2,4-azetinedione:



mentre a temperatura più bassa riscontrarono solo polimerizzazione del chetene.

- [4] FELIX FR. und GEIGER E. *Hochmolekulare Anlagerungsprodukte des Dimethylketenes an Isocyanat und Schwefelkohlenstoff*. « Helv. Chim. Acta », **8**, 314, (1925).
- [5] STAUDINGER H. und HIRZEL. *Ketene XXVII Keten-dicarbonester und Phenyl-Keten-carbonester*. « Ber. », **50**, 1024, (1917).
HORNER L. und SPITSCHKA E. *Die praeparative Bedeutung der Zersetzung von Diazo-carbonylverbindungen im UV-Licht*. « Ber. », **85**, 227, (1952).
- [6] WISLICENUS W. und ERBE R. *Ueber die Isomerie der Formylphenylessigester*, V Abhandlung. *Ueber Anilid und Piperidid der Formylphenylessigsaeure*. « Ann. », **421**, 119, (1920).
- [7] WHITELEY M. A. *Studies in the Barbituric Acid Series I - 1,3-Diphenylbarbituric Acid and some coloured derivatives*. « J. Chem. Soc. », 1907, 1330.
- [8] McELVAIN S. M. and VENERABLE J. T. *Ketene Acetals XXI. The dealcoholation of Orthoesters*. « J. Am. Chem. Soc. », **72**, 1661, (1950).
- [9] WALTERS P. M. and McELVAIN S. M. *Ketene Acetals VI. The preparation of Ketene Acetals from α-bromo-orthoesters*. « J. Am. Chem. Soc. », **62**, 1482, (1946).

IL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO IN PRESENZA DI ATTRITO NEI VINCOLI

Nota dell'ing. Tullio Renzulli
presentata dal socio ordinario Vincenzo Franciosi

(Adunanza del dì 6 dicembre 1958)

Sunto. - Lo studio delle strutture monodimensionali piane, che generalmente possono schematizzarsi come un insieme di travi elastiche vincolate tra loro ed al suolo da incastri, cerniere, bielle e carrelli, è condotto nella ipotesi che i vincoli possano risultare non lisci. La presenza dell'attrito impone alcuni accorgimenti per la ricerca delle soluzioni del problema dell'equilibrio elastico, che sono in questo caso infinite e dipendono dalla legge di applicazione dei carichi esterni. Si riporta un esempio numerico.

1. Premessa.

Un sistema monodimensionale piano è detto isostatico o iperstatico a seconda che le sole equazioni della statica sono sufficienti o meno alla determinazione delle reazioni esterne e delle interazioni. Nel caso di vincoli privi di attrito, cioè quando le cerniere possono reagire solo con forze passanti per i rispettivi centri ed i carrelli sono atti a reagire solo con forze normali ai rispettivi piani di scorrimento, è ben nota la determinazione del grado di iperstaticità della struttura.

Posto

h numero delle travi costituenti la struttura
 c » delle cerniere interne
 m_i » delle travi collegate dalla i -esima cerniera interna
 b » degli incastri interni
 n_i » delle travi collegate dall' i -esimo incastro interno
 k » dalle bielle interne (colleganti sempre due soli elementi)
 $c' \ b' \ k'$ numeri analoghi a c, b, k e relativi ai vincoli esterni che si suppongono sempre collegare al suolo un solo elemento della struttura, il grado di iperstaticità n è fornito dalla relazione

$$n = 3 \sum_1^h n_i + 2 \sum_1^c m_i + 2k + 3b' + 2c' + k' - 3b - 2c - k - 3h$$

che può anche scriversi

$$(1) \quad n = 3 \left(\sum_1^b n_i + b - b' \right) + 2 \left(\sum_1^c m_i + c' - c \right) + k + k' - 3h.$$

Nel caso che alcuni dei vincoli esterni o interni presentano attrito il grado di iperstaticità della struttura aumenta. La (1) è infatti ottenuta considerando che ciascuna trave presenta un numero di incognite sovrabbondanti (rispetto alle tre determinabili da considerazioni di statica) pari al numero di vincoli semplici esterni ed interni ad essa relativi, meno tre. Inoltre è possibile scrivere un numero di equazioni ausiliarie, di equilibrio dei vincoli interni, pari a tre per ogni nodo incastro, due per ogni nodo cerniera ed uno per ogni biella.

A causa della presenza di vincoli non lisci si presentano altre m incognite costituite dalle componenti delle reazioni dei carrelli lungo i piani di scorrimento dei medesimi, dalle componenti delle reazioni delle bielle nelle direzioni normali agli assi delle bielle stesse, dai momenti trasmessi dalle cerniere agli elementi da esse collegate meno uno, poichè detti momenti devono farsi equilibrio.

Il grado di iperstaticità è dunque $n + m$.

A caratterizzare gli sforzi di attrito si assume la legge di COULOMB; per il carrello dette V ed H le componenti della reazione rispettivamente normale e parallela al piano di scorrimento e detto f il coefficiente di attrito risulta

$$(2) \quad |H| \leq f |V|.$$

Analoga è la relazione relativa alla biella il cui comportamento è perfettamente equivalente a quello del carrello; pertanto di seguito si farà riferimento solo a questo vincolo, intendendo che le considerazioni ad esso relative valgono anche per la biella.

Per la cerniera detto r il raggio di attrito, R la reazione ed M il momento, si ha

$$(2') \quad |M| \leq r |R|$$

Le (2) e (2') possono anche scriversi

$$(3) \quad \begin{aligned} H^2 &\leq f^2 V^2 \\ M^2 &\leq r^2 R^2 \end{aligned}$$

e si enunciano sinteticamente dicendo che il carrello può reagire con una forza non esterna al cono di attrito (cono di asse normale al piano di scorrimento e di angolo di apertura 2φ ponendo $\operatorname{tg}\varphi = f$), e che la cer-

niera può reagire con una forza non esterna al cerchio di attrito (cerchio con centro nella cerniera e raggio r).

2. Scrittura delle equazioni.

Presenti dunque la struttura in esame $n + m$ incognite, dove m sono conseguenza dell'attrito dei vincoli. Il sistema principale, necessario alla risoluzione attraverso il principio dei lavori virtuali, è scelto a vincoli lisci, sicchè risultano eliminate per esso le incognite di attrito (1).

La scelta è così fatta poichè in presenza di attrito dei vincoli il principio di sovrapposizione degli effetti non è in generale valido; così risulta del seguente esempio:

l'arco a due cerniere della fig. 1 *a* è a vincoli imperfetti, sicchè in A

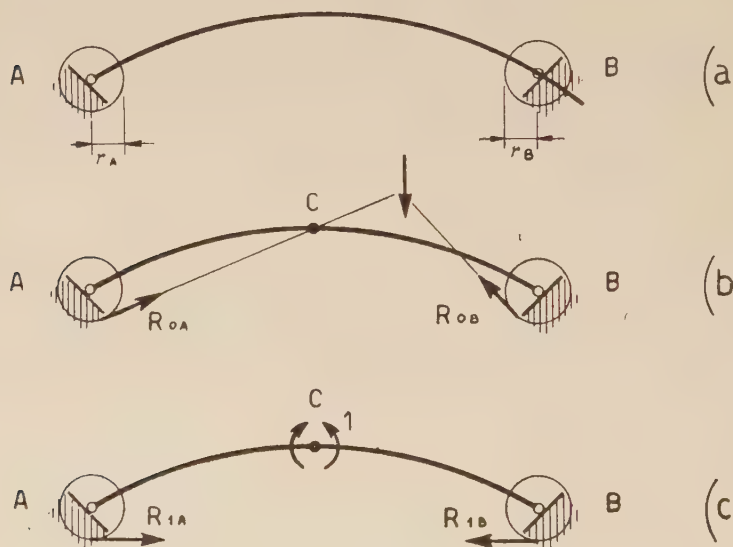


Fig. 1.

e B possono destarsi tutte le reazioni interne o tangenti ai rispettivi cerchi di attrito. Scelto come sistema principale l'arco a tre cerniere della fig. 1 *b*, sistema a vincoli non lisci, gli sforzi su di esso causati dai carichi esterni non sono univocamente determinati. Una forza esterna può scomporsi in infiniti modi secondo due rette secanti o tangenti ai due cerchi

¹⁾ E' possibile la sopracitata scelta del sistema principale sempre che la struttura derivata da quella in esame mediante la eliminazione delle incognite di attrito risulti per lo meno isostatica. E' questo il caso più comune, poichè nella pratica tecnica difficilmente si fa affidamento sul solo attrito per assicurare la stabilità della struttura.

di attrito. Prendendo in esame ad esempio la reazione in B, R_{0B} , sia essa tale da soddisfare alla condizione limite di attrito, e cioè tangente alla circonferenza di raggio r_B . Le stesse considerazioni valgono per il sistema della fig. 1 *c* caricato da due coppie di intensità unitaria nella cerniera di chiave. Chiamata R_{1B} la reazione in B sia anche questa tangente al cerchio di attrito. L'applicazione del principio dei lavori virtuali fornisce, con i noti simboli, la relazione

$$0 = \int \frac{M_1 M ds}{EI} + \int \chi \frac{T_1 T ds}{GA} + \int \frac{N_1 N ds}{EA}$$

dalla quale si ricava la incognita X.

Detta R_B la reazione in B per il sistema assegnato caricato dalla forza considerata si ottiene

$$R_B = R_{0B} + X R_{1B}.$$

La reazione R_B passa per il punto di incontro delle altre due R_{0B} e R_{1B} e non è più tangente al cerchio di attrito: in generale essa può essere addirittura esterna al cerchio stesso. Cioè la R_B può non soddisfare alla (3)₂ benchè sia la risultante di due forze che separatamente ad essa soddisfano.

Assunto dunque un sistema principale a vincoli lisci per una struttura $n + m$ volte iperstatica si indicano con X_i le incognite di attrito e con \bar{X}_i le n altre. L'applicazione del principio dei lavori virtuali agli n sistemi di forze $X_i = 1$ e al sistema di spostamenti effettivi conduce alle n relazioni del tipo

$$0 = \int \frac{M_i M ds}{EI} + \int \frac{N_i N ds}{EA} + \int \chi \frac{T_i T ds}{GA}$$

dove è

$$M = M_0 + \sum_1^m \bar{M}_i \bar{X}_i + \sum_1^n M_i X_i$$

$$N = N_0 + \sum_1^m \bar{N}_i \bar{X}_i + \sum_1^n N_i X_i$$

$$T = T_0 + \sum_1^m \bar{T}_i \bar{X}_i + \sum_1^n T_i X_i$$

$M_i, N_i, T_i; \bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{T}_i$ sono rispettivamente le caratteristiche della sollecitazione sui sistemi caricati dalle $X_i = 1$ e $\bar{X}_i = 1$.

Sviluppando si ottiene il sistema delle n equazioni lineari non omogenee nelle $n + m$ incognite X_i e \bar{X}_i .

$$(4) \quad \begin{aligned} 0 &= \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \dots + \delta_{1n} X_n + \bar{\delta}_{11} \bar{X}_1 + \dots + \bar{\delta}_{1m} \bar{X}_m \\ 0 &= \delta_{n0} + \delta_{n1} X_1 + \dots + \delta_{nn} X_n + \bar{\delta}_{n1} \bar{X}_1 + \dots + \bar{\delta}_{nm} \bar{X}_m \end{aligned} \quad ^2)$$

Alle (4) per adeguare il numero delle equazioni al numero delle incognite si aggiungono le m condizioni di attrito, che nel caso generale si scrivono rispettivamente per il carrello e per la cerniera

$$\begin{aligned} (H_0 + \sum_1^n H_i X_i + \sum_1^m \bar{H}_i \bar{X}_i)^2 &\leq f^2 (V_0 + \sum_1^n V_i X_i + \sum_1^m \bar{V}_i \bar{X}_i)^2 \\ (M_0 + \sum_1^n M_i X_i + \sum_1^m \bar{M}_i \bar{X}_i)^2 &\leq r^2 [(H_0 + \sum_1^n H_i X_i + \sum_1^m \bar{H}_i \bar{X}_i)^2 + \\ &+ (V_0 + \sum_1^n V_i X_i + \sum_1^m \bar{V}_i \bar{X}_i)^2] \end{aligned}$$

ove i simboli hanno il significato ovvio.

Poichè tra le incognite sono state scelte le quantità H ed M le equazioni precedenti si semplificano come segue

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^2 &\leq f^2 (V_0 + \sum_1^n V_i X_i + \sum_1^m \bar{V}_i \bar{X}_i)^2 \\ (5) \quad \bar{X}_j^2 &\leq r^2 [(H_0 + \sum_1^n H_i X_i + \sum_1^m \bar{H}_i \bar{X}_i)^2 + (V_0 + \sum_1^n V_i X_i + \sum_1^m \bar{V}_i \bar{X}_i)^2] \end{aligned}$$

Le (4) e le (5) sono le $n + m$ relazioni cercate.

Si nota che nelle relazioni ottenute applicando il principio dei lavori virtuali agli m sistemi fittizi di forze $\bar{X}_i = 1$ ed agli spostamenti effettivi compaiono le incognite quantità Δ_i (indicando con Δ_i gli spostamenti o rotazioni per cui compiono lavoro le incognite di attrito) che possono

²⁾ Nel sistema (4) i coefficienti δ sono i ben noti coefficienti di influenza. Si è supposto inoltre che non si abbiano, oltre gli eventuali spostamenti permessi dai vincoli con attrito, altri cedimenti elastici o anelastici.

essere non nulle: infatti non sempre è nullo il lavoro della forza $\bar{X}_i = 1$ poichè il vincolo iesimo, seppure con attrito, permette uno spostamento o rotazione dell'elemento su cui agisce. Pertanto nelle dette equazioni compaiono gli incogniti spostamenti relativi (le rotazioni relative) tra le sezioni vincolate da un carrello con attrito (da una cerniera con attrito).

Le relazioni suddette non sono quindi utili ai fini della determinazione dello stato tensionale ma alla determinazione della deformazione del sistema.

3. Ricerca delle soluzioni.

Le (4) costituiscono un sistema di n equazioni lineari non omogenee nelle $n + m$ incognite X e \bar{X} . Come ben noto è possibile da esse ricavare le X in funzione delle \bar{X} , ottenendo n relazioni del tipo lineare non omogeneo.

Sostituendo quindi nelle (5) si ottengono m disuguaglianze nelle incognite \bar{X} che possono sinteticamente scriversi

$$(6) \quad X_i^2 \leq (a_{i0} + a_{i1} \bar{X}_1 + \dots + a_{im} \bar{X}_m)^2$$

$$X_j^2 \leq (b_{j0} + \sum_1^m b_{ji} \bar{X}_i)^2 + (c_{j0} + \sum_1^m c_{ji} \bar{X}_i)^2.$$

I coefficienti a , b , c comprendono il quadrato del coefficiente di attrito o del raggio di attrito che non compaiono quindi esplicitamente.

Le (6) sono le disuguaglianze alle quali devono soddisfare le incognite di attrito X . Ottenute tutte le possibili soluzioni delle (6) le altre incognite sono determinate in funzione di esse, per quanto sopra scritto.

Sostituendo nelle (6) ai segni di disuguaglianza quelli di uguaglianza si ottengono le equazioni che devono essere soddisfatte per realizzare le condizioni di massimo attrito: in questo caso la retta d'azione della reazione del carrello appartiene al cono di attrito e quella della cerniera è tangente al cerchio di attrito. Le condizioni di massimo attrito per la cerniera non sono sempre realizzabili, come si esporrà in seguito.

Si può dimostrare che le (6) ammettono ∞^m soluzioni,

Si prende in esame una relazione del tipo della (6)₂, che è più generale, trattando dapprima il caso di una sola incognita. La disuguaglianza è allora del tipo

$$0 \leq -\bar{X}^2 + (b_0 + b_1 \bar{X})^2 + (c_0 + c_1 \bar{X})^2$$

da cui

$$(7) \quad 0 \leq (-1 + b_1^2 + c_1^2) \bar{X}^2 + 2(b_0 b_1 + c_0 c_1) \bar{X} + b_0^2 + c_0^2.$$

Lo studio della disuguaglianza (7) è legato a quello della equazione

$$(8) \quad 0 = (-1 + b_1^2 + c_1^2) \bar{X}^2 + 2(b_0 b_1 + c_0 c_1) \bar{X} + b_0^2 + c_0^2.$$

Poichè la (7) è soddisfatta nel punto $\bar{X} = 0$, nel quale si riduce alla relazione

$$0 \leq b_0^2 + c_0^2,$$

esiste un intervallo nel quale detta relazione è soddisfatta, che dipende dalle radici della (8). Da questa equazione si trae infatti

$$(9) \quad \bar{X} = \frac{-(b_0 b_1 + c_0 c_1) \pm \sqrt{b_0^2 + c_0^2 - (b_0 c_1 - b_1 c_0)^2}}{-1 + b_1^2 + c_1^2}$$

Se nella (9) il radicando è negativo la (8) non ammette radici reali e pertanto il secondo membro della (7) non cambia mai segno. La (7) resta dunque valida anche per $\bar{X} = \infty$ il che non è fisicamente accettabile.

A questo assurdo si perviene a causa del fatto che la condizione (8), condizione limite di attrito per la cerniera, non è sempre realizzabile. Uguagliando il momento di attrito ad una aliquota di quello massimo, si ottiene al posto della (7) la relazione ($0 < \alpha < 1$)

$$\bar{X}^2 = \alpha^2 [(b_0 + b_1 \bar{X})^2 + (c_0 + c_1 \bar{X})^2]$$

da cui si trae

$$(10) \quad 0 = \left(-\frac{1}{\alpha^2} + b_1^2 + c_1^2\right) \bar{X}^2 + 2(b_0 b_1 + c_0 c_1) \bar{X} + b_0^2 + c_0^2.$$

La equazione (10) ammette le radici

$$\bar{X} = \frac{-(b_0 b_1 + c_0 c_1) \pm \sqrt{\frac{b_0^2 + c_0^2}{\alpha^2} - (b_0 c_1 - b_1 c_0)^2}}{-\frac{1}{\alpha^2} + b_1^2 + c_1^2}$$

da cui, moltiplicando per α^2 numeratore e denominatore, si ottiene

$$(11) \quad \bar{X} = \frac{-\alpha^2 (b_0 b_1 + c_0 c_1) \pm \sqrt{b_0^2 + c_0^2 - \alpha^2 (b_0 c_1 - b_1 c_0)^2}}{-1 + \alpha^2 (b_1^2 + c_1^2)}$$

Ponendo α così piccolo che risulti

$$(11') \quad \alpha^2 \leq \frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0 c_1 - b_1 c_0)^2}$$

si hanno per la (11) due radici reali. Agli infiniti valori che possono assegnarsi ad α rispettando la (11') corrispondono infiniti valori di \bar{X} ; al limite per $\alpha \rightarrow 0$ si hanno i due valori opposti

$$\bar{X} = \pm \sqrt{b_0^2 + c_0^2}$$

Nel caso che l'unico vincolo con attrito sia un carrello le (6) si riducono alla relazione

$$\bar{X}^2 \leq (a_0 + a_1 \bar{X})^2$$

da cui

$$(12) \quad 0 \leq (-1 + a_1^2) \bar{X}^2 + 2a_0 a_1 \bar{X} + a_0^2;$$

la (12) ammette le due radici reali

$$(13) \quad \bar{X}_1 = -\frac{a_0}{1 + a_1} \quad \bar{X}_2 = \frac{a_0}{1 - a_1}$$

In questo caso dunque la condizione limite di attrito è sempre realizzabile.

Nel caso generale di più vincoli con attrito le condizioni (6) possono scriversi con la precisazione in merito alla condizione di attrito per le cerniere

$$(14) \quad \begin{aligned} X_i^2 &\leq (a_{i0} + \sum_l a_{il} \bar{X}_l)^2 \\ \bar{X}_j^2 &= \alpha_j^2 [(b_{j0} + \sum_l b_{jl} \bar{X}_l)^2 + (c_{j0} + \sum_l c_{jl} \bar{X}_l)^2] \end{aligned}$$

Considerando nelle (14) note tutte le incognite tranne X_i o X_j per la equazione corrispondente alla (14), si trovano ancora due radici, l'una positiva l'altra negativa, che sono ancora date dalle (13) ove si ponga

$$(15) \quad \begin{aligned} a_0 &= a_{i0} + a_{i1} \bar{X}_1 + \dots + a_{i,i-1} \bar{X}_{i-1} + a_{i,i+1} \bar{X}_{i+1} + \dots + a_{i,m} \bar{X}_m \\ a_1 &= a_{ii}. \end{aligned}$$

La stessa considerazione vale per la (14)₂: la (11) e le conseguenze relative rimangono valide ove si ponga

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \alpha \\ b_0 &= b_{j,0} + b_{j,1} \bar{X}_1 + \dots + b_{j,j-1} \bar{X}_{j-1} + b_{j,j+1} \bar{X}_{j+1} + \dots + b_{j,m} \bar{X}_m \\ (16) \quad b_1 &= b_{jj} \\ c_0 &= c_{j,0} + c_{j,1} \bar{X}_1 + \dots + \dots + c_{j,j-1} \bar{X}_{j-1} + c_{j,j+1} \bar{X}_{j+1} + \dots + c_{j,m} \bar{X}_m \\ c_1 &= c_{jj}.\end{aligned}$$

Quanto sopra permette di affermare che ogni relazione del tipo (14)₁ ammette infinite soluzioni per \bar{X}_i , quali che siano i valori finiti delle altre incognite, e ogni relazione del tipo (14)₂ è tale che si possono trovare infiniti valori di α_j sufficientemente prossimi a zero per i quali, qualunque siano i valori delle altre incognite, si hanno infiniti valori di \bar{X}_j . Tutte le possibili soluzioni sono dunque ∞^m .

La non linearità delle (6) non permette in generale di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Più precisamente le disuguaglianze (6) possono non essere soddisfatte da un sistema di \bar{X} somma di due sistemi che separatamente le soddisfano. E' per questo motivo che si è operato su un sistema principale isostatico privo di attrito.

Qualora però tutte le forze crescono lasciando invariati i mutui rapporti, cioè allorchè il carico della struttura è realizzato moltiplicando gradatamente le forze esterne per un fattore via via crescente, per le (6) è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti ³⁾.

In questo caso infatti il primo e il secondo membro delle (6) sono moltiplicati per uno stesso fattore e le relazioni rimangono pertanto valide, ed è possibile determinare la configurazione di equilibrio che è unica. Convienne a questo fine operare per tentativi considerando da prima i vincoli con attrito come fissi e risolvendo il problema iperstatico. Si itera quindi il procedimento assumendo come incognite \bar{X} quelle per le quali le (6) non sono verificate e imponendo le condizioni limiti di attrito.

4) Esempio.

Si considera il portale a sezione costante della fig. 2 vincolato in A

³⁾ A questo proposito interessanti considerazioni sono contenute nel volume: "Plasticité", di A.A. ILIOUCHINE, Cap. I e II. Eyrolles, Paris.

e B da due cerniere con attrito, caricato da una forza in chiave. Detta l la lunghezza, uguale sia per i ritti che per il traverso, è:

$$r_A = \frac{l}{20} \quad r_B = \frac{l}{15}.$$

La determinazione degli sforzi interni si può ricondurre alla ricerca della spinta (X) e dei due momenti in B (\bar{X}_1) ed in A (\bar{X}_2).

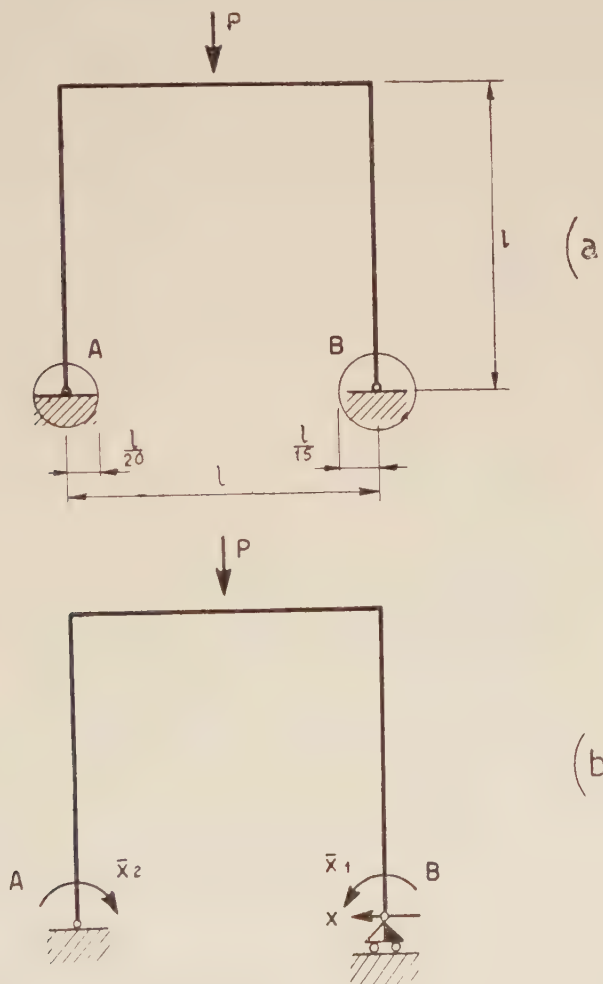


Fig. 2.

Tenendo conto soltanto delle deformazioni dovute al momento e risultando

$$\int M_1 M_0 ds = -\frac{1}{8} P l^3$$

$$\int M_1^2 ds = \frac{5}{3} l^3$$

$$\int M_1 \bar{M}_1 ds = \int M_1 \bar{M}_2 ds = - l^3$$

dove ovviamente è

$$\begin{array}{llllllll} M_0 & \text{momento nella struttura principale caricata dalla sola forza } P \\ M_1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & X_1 = 1 \\ \bar{M}_1 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \bar{X}_1 = 1 \\ \bar{M}_2 & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \bar{X}_2 = 1 \end{array}$$

si ha, applicando il principio dei carichi virtuali al sistema di forze provocati dalla $X = 1$ nella struttura principale ed agli spostamenti effettivi:

$$(17) \quad 0 = \int M_1 M ds = -\frac{1}{8} Pl^3 + X \frac{5}{3} l^3 - (\bar{X}_1 + \bar{X}_2) l^2$$

Indicando con R_A e R_B le due reazioni in A e B per la struttura effettiva risulta:

$$(18) \quad R_A = \sqrt{\left(\frac{P}{2} + \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{l}\right)^2 + X^2} \quad R_B = \sqrt{\left(\frac{P}{2} + \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{l}\right)^2 + X^2}$$

e pertanto le due condizioni di attrito si scrivono

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{X}_1 &\leq \frac{1}{225} \left[\left(\frac{Pl}{2} + \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \right)^2 + \bar{X}_1^2 l^2 \right] \\ \bar{X}_2 &\leq \frac{1}{400} \left[\left(\frac{Pl}{2} + \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \right)^2 + X^2 l^2 \right] \end{aligned}$$

Ponendo $y_1 = \frac{\bar{X}_1}{Pl}$; $y_2 = \frac{\bar{X}_2}{Pl}$, ricavando X dalla (17) e sostituendo nelle (19) si trae:

$$(20) \quad \begin{aligned} 0 &\leq -223,64 y_1^2 + 1,63 y_2^2 - 1,28 y_1 y_2 - 0,91 y_1 + 1,09 y_2 + 0,2556 \\ 0 &\leq -398,64 y_2^2 + 1,36 y_1^2 - 1,28 y_1 y_2 + 1,09 y_1 - 0,91 y_2 + 0,2556 \end{aligned}$$

E' facile constatare che le equazioni ottenute dalle (20) sostituendo i segni di disuguaglianza con quelli di uguaglianza rappresentano nel piano $y_1 y_2$ due iperboli. Dette equazioni costituiscono un sistema le cui

quattro soluzioni sono :

$$y_1 = 0,0336$$

$$- 0,0341$$

$$- 0,0376$$

$$0,0300$$

$$y_2 = 0,0259$$

$$- 0,0246$$

$$+ 0,0222$$

$$- 0,0282$$

Nella fig. 3 sono rappresentati parte dei due rami delle iperboli relative alla prima equazione (di asintoti r ed r') e alla seconda (di asintoti

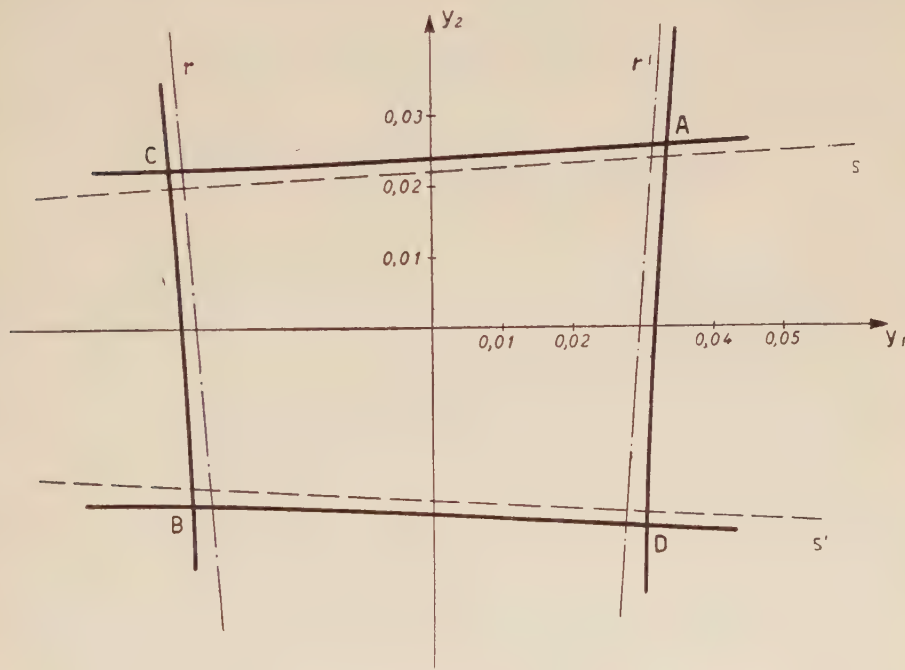


Fig. 3

s e s'). Le quattro soluzioni sono rappresentate rispettivamente dai quattro punti A, B, C e D.

Per il portale perfettamente incastrato risulta $y_1 = y_2 = 0,050$.

E' immediato verificare che tutti i punti del piano compresi nel quadrilatero mistilineo ACBD soddisfano alle (20), e costituiscono le ∞^2 soluzioni possibili.

Qualora si stabilisca che il valore della forza da zero cresca fino al valore finale, senza l'intervento di altre cause, il problema è determinato avendosi la soluzione rappresentata dal punto A. Caricando infatti il sistema con una forza piccolissima P, per ragioni di continuità il diagram-

ma del momento deve essere compreso tra i due diagrammi limite che si hanno supponendo la struttura incernierata senza attrito in A e B o perfettamente incastrata in A e B. Di conseguenza i due momenti di incastro hanno verso concorde a quello della fig. 2 b. Aumentando il valore di P, si amplificheranno detti momenti, rimanendo invariati i mutui rapporti per la validità in questo caso del principio di sovrapposizione.

Di conseguenza delle quattro soluzioni che si hanno per condizioni limiti di attrito l'unica in questo caso possibile è quella rappresentata dal punto A.

Università di Napoli, Facoltà di Ingegneria, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Ottobre 1958.

CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO
DELL' ACCADEMIA DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
PER GLI ANNI 1959-1960

L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1959-1960.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all'autore della migliore memoria sul tema: « *Ricerche sulle anomalie delle strutture cristalline mediante i raggi X* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 31 ottobre 1960.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell'autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell'autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto l'*accessit* saranno aperte nell'adunanza plenaria del gennaio 1961 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell'archivio dell'Accademia banditrice.

Napoli, 1° gennaio 1959.

Il Segretario
GEREMIA D'ERASMO

Il Presidente
VITTORIO NOBILE

LE PIASTRE CIRCOLARI APPOGGIATE IN PIÙ PUNTI DEL LORO CONTORNO

Nota del socio corrispondente prof. Elio Giangreco

(Adunanza del dì 6 dicembre 1958)

Sunto. — Richiamata brevemente la trattazione generale delle piastre circolari appoggiate al contorno su n appoggi puntiformi, si tratta in particolare il caso di quella appoggiata su 2 e 3 punti equidistanti e si mette in rilievo come molti altri casi si possono ottenere come combinazione di questi ultimi.

Si riportano in tabelle e diagrammi le grandezze necessarie per le applicazioni e si riporta un esempio numerico di un caso particolare.

1) Premesse.

L'equazione differenziale in coordinate polari che regge il problema della piastra circolare è:

$$(1) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D}$$

la cui soluzione w , determinata con riferimento alle condizioni al contorno, si può mettere nella forma:

$$(2) \quad w = w_0 + w'$$

denotando come w_0 la deformata della piastra appoggiata al contorno e w' la soluzione generale dell'omogenea associata.

In questo modo, la soluzione del problema si riconduce alla determinazione della funzione w' per una piastra appoggiata in più punti del contorno ed ivi caricata con la reazione cambiata di segno della piastra appoggiata su tutto il contorno.

Se N_k è la reazione concentrata del generico appoggio K , essa è rappresentabile con la serie:

$$(3) \quad \frac{N_k}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_k \right)$$

dove $\theta_k = \theta - \gamma_k$, essendo γ_k l'angolo che definisce la posizione dell'appoggio K (fig. 1).

La reazione totale dell'intero contorno risulta:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^i \frac{N_k}{\pi a} \left(\frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_k \right).$$

La soluzione generale della omogenea associata della (1), dopo aver

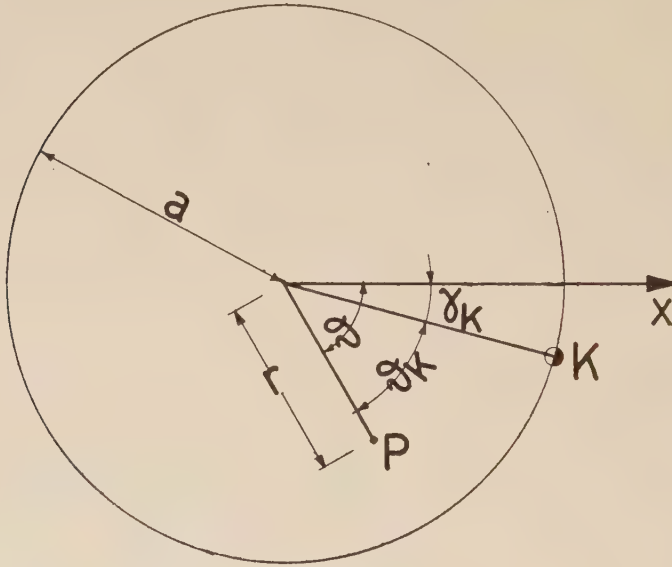


FIG. 1.

annullato i termini singolari per $r = 0$, si può scrivere nella forma:

$$(5) \quad w' = A_0 + B_0 r^2 + \sum_1^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta + \\ + \sum_1^{\infty} (A'_m r^m + C'_m r^{m+2}) \cdot \sin m\theta.$$

Per la determinazione delle costanti si fa riferimento alle condizioni al contorno:

$$(6) \quad \begin{cases} (M_r')_{r=a} = -D \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \\ (V_r')_{r=a} = \left(T_r' - \frac{\partial M_r' \theta}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = - \sum_{k=1}^i \frac{N_k}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_k \right). \end{cases}$$

Dall'applicazione delle (6) si arriva a scrivere per w' l'espressione seguente, in cui è posto $\rho = \frac{r}{a}$:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad w' = & A_0 + A_1 a \rho \cos m\theta + \sum_{m=2,3}^{\infty} \frac{a^3}{D} \left\{ \left[\frac{(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \frac{1}{2m(m-1)(3+\nu)} \right\} - \sum_{k=1}^i \frac{N_k}{\pi a} \cos m\gamma_k \left\{ \cos m\theta + \right. \\
 & \left. + A_1' a \rho \sin m\theta + \sum_{m=2,3}^{\infty} \frac{a^3}{D} \left\{ \left[\frac{m(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m - \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \frac{1}{2m(m-1)(3+\nu)} \right\} \left[\sum_{k=1}^i \frac{N_k}{\pi a} \sin m\gamma_k \right] \right\} \sin m\theta.
 \end{aligned}$$

Le costanti A_0 , A_1 , A_1' , si determinano con la condizione che l'abbassamento sia nullo su tre appoggi.

Se in particolare il carico è distribuito con simmetria e gli appoggi sono equidistanti, tutte le N_k sono uguali a $\frac{P}{i}$ per cui è:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^i \frac{N_k}{\pi a} \cos m\gamma_k = \frac{P}{\pi a i} \sum_{k=1}^i \cos m\gamma_k$$

ed analogamente per i termini contenenti il seno.

Con l'origine in uno dei punti di appoggio si ha anche in tale caso:

$$(9) \quad \gamma_k = \frac{2\pi}{i} (k-1).$$

2) La piastra circolare su due appoggi simmetrici.

Consideriamo ora la piastra appoggiata su due punti diametralmente opposti e caricata simmetricamente.

In questo caso si ha:

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = \pi$$

$$\frac{P}{\pi a i} \sum_{k=1}^i \cos m \gamma_k = \frac{P}{2 \pi a} [1 + \cos m \pi] = \begin{cases} = \frac{P}{\pi a} & \text{per } m \text{ pari} \\ = 0 & \text{per } m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\frac{P}{\pi a i} \sum_{k=1}^i \sin \pi \gamma_k = \frac{P}{2 \pi a} \sin m \pi = 0.$$

La (7) pertanto si scrive :

$$w_2' = A_0 + A_1 a \rho \cos \theta + A_1' a \rho \sin \theta + \frac{P a^2}{2 \pi D (3 + \nu)} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \cdot \left[\frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m + \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \right\} \cos m \theta$$

con le condizioni :

$$\begin{cases} w_2'(1,0) = 0 \\ w_2'(1,\pi) = 0 \end{cases}$$

e che si abbia simmetria rispetto all'asse delle θ , si ha :

$$\begin{cases} A_1 = A_1' = 0 \\ A_0 = \frac{P a^2}{2 \pi D (3 + \nu)} \left\{ 2 \lg 2 - 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(2 \lg 2 - \frac{\pi^2}{12} \right) \right\} \end{cases}$$

se ne deduce :

$$\begin{aligned} w_2 = w_0 + w_2' &= w_0 + \frac{P a^2}{2 \pi D (3 + \nu)} \left\{ 2 \lg 2 - 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(2 \lg 2 - \frac{\pi^2}{12} \right) \right\} + \\ &+ \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m + \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \cos m \theta \\ M_{r_2} = M_{r_0} + M'_{r_2} &= M_{r_0} + \frac{P}{2 \pi (3 + \nu)} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{m(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m} \left(\rho^m - \rho^{m-2} \right) \right\} \cos m \theta \\ M_{t_2} = M_{t_0} + M'_{t_2} &= M_{t_0} + \frac{P}{2 \pi (3 + \nu)} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{m(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m} \rho^{m-2} + \frac{m(1-\nu) - 2(\nu+1)}{m} \rho^m \right\} \cdot \cos m \theta \\ V_{r_2} = V_{r_0} + V'_{r_2} &= V_{r_0} + \frac{P}{2 \pi a (3 + \nu)} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\rho^{m-1} - \rho^{m-3} \right) \left[m(1-\nu) + 2(1+\nu) \right] - \rho^{m-1} \right\} \cos m \theta \end{aligned}$$

Nelle tabelle n. 1, 2, 3 sono riportate le quantità $w_2' D/Pa^2$; M'_{r_2}/P ; M'_{t_2}/P ; in funzione di ρ, θ , avendo posto $\nu = 0,1$.

Il calcolo è stato condotto, per le espressioni di cui non era possibile conoscere la somma della serie, fermandosi al termine m che non influenzava la quarta cifra decimale.

Nelle tabelle 4, 5, 6 sono riportate invece le quantità $w_2 D/Pa^2$; M_{r_2}/P ; M_{t_2}/P ; nel caso della piastra soggetta a carico ripartito.

3) Piastra circolare su 3 appoggi equidistanti.

In tal caso si ha, misurando θ a partire dal diametro passante per uno degli appoggi:

$$\gamma_1 = 0; \gamma_2 = -\frac{2}{3} \pi; \gamma_3 = \frac{4}{3} \pi$$

e le espressioni (8) diventano:

$$\begin{aligned} \frac{P}{\pi a i} \sum_{k=1}^i \cos m \gamma_k &= \frac{P}{3\pi a} \left[\cos m 0 + \cos m -\frac{2}{3} \pi + \cos m \frac{4}{3} \pi \right] = \\ &= \begin{cases} = \frac{P}{\pi a} & \text{per } m = 3, 6, 9, \dots \\ = 0 & \text{per } m \neq 3, 6, 9, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{\pi a i} \sum_{k=1}^i \sin m \gamma_k = 0.$$

La (7) pertanto si scrive:

$$\begin{aligned} w_3' &= A_0 + A_1 a \rho \cos \theta + A_1' a \rho \sin \theta + \\ &+ \frac{P a^2}{2\pi D(3+\nu)} \sum_{m=3,6,9,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \left| \frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m + \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right| \right\} \cos m\theta. \end{aligned}$$

La determinazione delle costanti A_0, A_1, A_1' , si persegue con le condizioni:

$$\begin{cases} w_3'(1,0) = 0 \\ w_3'\left(1, \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \\ w_3'\left(1, \frac{4}{3}\pi\right) = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$A_1 = 0; \quad A_1' = 0;$$

$$A_0 = - \frac{P a^2}{2\pi D (3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} + \frac{m-1}{m+1} \right] \right\};$$

si ha pertanto:

$$\begin{aligned} w_3 &= w_0 + w_3' = w_0 - \frac{P a^2}{2\pi D (3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} + \frac{m-1}{m+1} \right] \right\} + \\ &+ \frac{P a^2}{2\pi D (3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(1-\nu) + 2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m + \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \right\} \cdot \cos m\theta \\ M_{r_3} &= M_{r_0} + M_{r_3}' = M_{r_0} + \frac{P}{2\pi(3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \left[\frac{m(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m} \right] \left(\rho^m - \rho^{m+2} \right) \right\} \cos m\theta \\ M_{t_3} &= M_{t_0} + M_{t_3}' = M_{t_0} + \frac{P}{2\pi(3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{m(\nu-1) - 2(1+\nu)}{m} \rho^{m-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(1-\nu) - 2(1+\nu)}{m} \rho^m \right\} \cos m\theta \\ V_{r_3} &= V_{r_0} + V_{r_3}' = V_{r_0} + \frac{P}{2\pi a(3 + \nu)} \sum_{m=3,6,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\rho^{m-1} - \rho^{m-3} \right) \left[m(1+\nu) + 2(1+\nu) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \rho^{m-1} \right\} \cos m\theta. \end{aligned}$$

Nelle tabelle 7, 8, 9 sono riportati i valori di $w_3' D/Pa^2$; M'_{r_3}/P ; M'_{t_3}/P ; in funzione di ρ e θ , avendo posto, come nel caso precedente: $\nu = 0,1$ con una approssimazione spinta sino alla quarta cifra decimale.

Si sono riportati inoltre nelle tabelle 10, 11, 12 i valori di $w_3 D/Pa^2$; M_{r2}/P ; M_{t3}/P ; nel caso della piastra soggetta a carico ripartito.

Nella figura 2 si riporta per una piastra su 3 appoggi l'andamento di M_{r3} , M_{t3} , w_3 nel caso di carico ripartito.

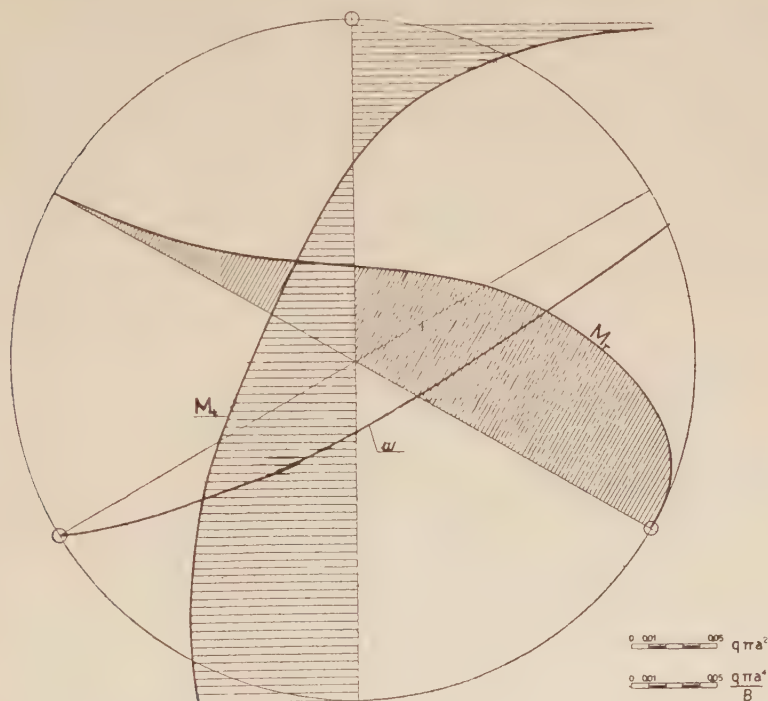


FIG. 2 — Diagramma dei momenti flettenti M_r (Kg/m) e M_t (Kg/m) e degli abbassamenti w (metri) per la piastra su 3 appoggi.

4) Piastre appoggiate su appoggi equidistanti in numero multiplo di due o tre.

Lo stato flessionale della piastra appoggiata su un numero di appoggi multiplo di due o tre, si può ottenere da quello della piastra su due o tre appoggi, immaginando che una aliquota s del carico sia portata da ognuna delle s piastre elementari, essendo s l'ordine di molteplicità.

Infatti la piastra su $i \cdot s$ appoggi si può studiare tramite quella su i , con $i = 2, 3$, ponendo:

$$(10) \quad w_{i \cdot s}(\varphi, \theta) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} \cdot w_i \left(\varphi, \theta + \frac{2k\pi}{i \cdot s} \right) - C$$

ove C è una costante da determinare annullando l'abbassamento su uno degli appoggi.

Per la generica caratteristica S flessionale si ha invece:

$$(11) \quad S_{i,s}(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{s} S_i\left(\rho, \theta + \frac{2k\pi}{i \cdot s}\right)$$

in cui non compare la costante C poichè si elimina nelle operazioni di derivazione.

Per esempio la piastra su quattro appoggi si risolve ponendo nelle (10) e (11) $i = 2, s = 2$. Infatti si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_4(\rho, \theta) = \frac{1}{2} w_2(\rho, \theta) + \frac{1}{2} w_2\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{2}\right) - C \\ M_{r_4}(\rho, \theta) = \frac{1}{2} M_{r_2}(\rho, \theta) + \frac{1}{2} M_{r_2}\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

dove C si determina attraverso la condizione:

$$w_4(1,0) = \frac{1}{2} w_2(1,0) + \frac{1}{2} w_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right) - C = 0$$

e pertanto

$$C = \frac{1}{2} w_2(1,0) + \frac{1}{2} w_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

La piastra su 6 appoggi si può ricavare da quella su 3 ponendo $i = 3, s = 2$, si ha in tal caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_6(\rho, \theta) = \frac{1}{2} w_3(\rho, \theta) + \frac{1}{2} w_3\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{3}\right) - C \\ w_{r_6}(\rho, \theta) = \frac{1}{2} M_{r_3}(\rho, \theta) + \frac{1}{2} M_{r_3}\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

dove, con la voluta condizione, C vale:

$$C = \frac{1}{2} w_3(1,0) + \frac{1}{2} w_3\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$$

oppure da quella su 2 appoggi ponendo $i = 2$, $s = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_6(\rho, \theta) = \frac{1}{3} w_2(\rho, \theta) + \frac{1}{3} w_2\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} w_2\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{3}\right) - C \\ M_{r6}(\rho, \theta) = \frac{1}{3} M_{r2}(\rho, \theta) + \frac{1}{3} M_{r2}\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} M_{r2}\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{3}\right), \end{array} \right.$$

dove C vale :

$$C = \frac{1}{3} w_2(1, 0) + \frac{1}{3} w_2\left(1, \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} w_2\left(1, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Per esempio per la piastra su quattro appoggi si ha :

$$C = \frac{1}{2} \left[w(1, 0) + w_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} w_2\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

e nel caso della piastra soggetta a carico ripartito si ha con l'ausilio delle tabelle riportate in appendice :

$$C = \frac{1}{2} 0,10013 \frac{P a^2}{D} = 0,05006 \frac{P a^2}{D}$$

$$w_4(\rho, \theta) = \frac{1}{2} w_2(\rho, \theta) + \frac{1}{2} w_2\left(\rho, \theta + \frac{\pi}{2}\right) - 0,05006 \frac{P a^2}{D}.$$

Nel punto di coordinate $\rho = 0,4$, $\theta = 30^\circ$ si ha per esempio :

$$\begin{aligned} w_4(0,4, 30^\circ) &= \left[\frac{1}{2} 0,05966 + \frac{1}{2} 0,07892 - \frac{1}{2} 0,10013 \right] \frac{P a^2}{D} = \\ &= 0,01922 \frac{P a^2}{D}. \end{aligned}$$

$$M_{r4}(0,4, 30^\circ) = \frac{1}{2} \left[0,08843 + 0,00503 \right] P = 0,04673 P,$$

essendo P il carico totale sulla piastra ($P = q\pi a^2$).

Nelle figure 3, 4, 5, 6, si riportano gli andamenti delle deformate rispettivamente per la piastra su 2, 3, 4, 6 appoggi.

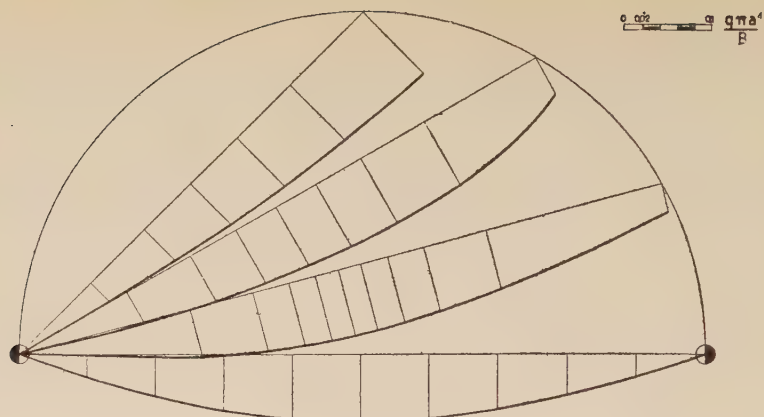


FIG. 3 — Diagramma degli abbassamenti w (metri) per la piastra su 2 appoggi.

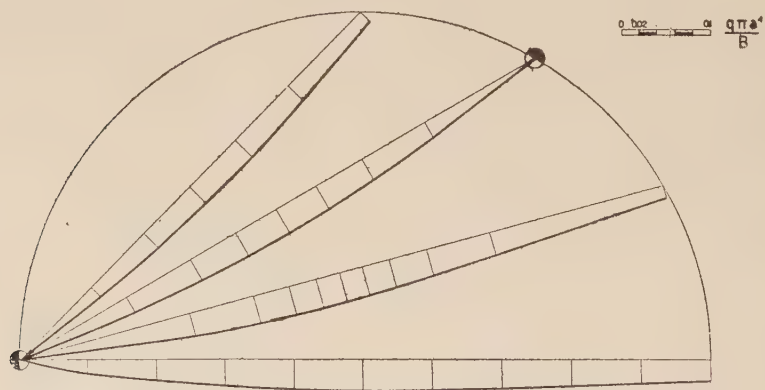


FIG. 4 — Diagramma degli abbassamenti w (metri) per la piastra su 3 appoggi.

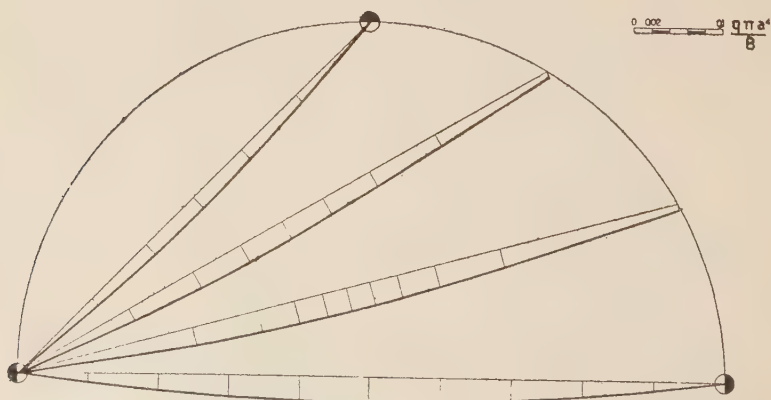


FIG. 5 — Diagramma degli abbassamenti w (metri) per la piastra su 4 appoggi.

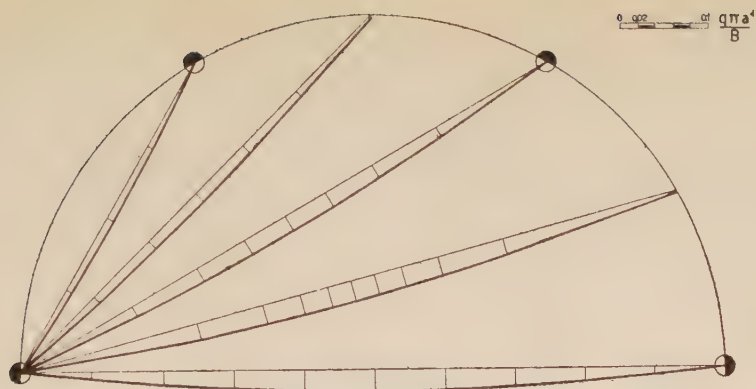


FIG. 6 Diagramma degli abbassamenti w (metri) per la piastra su 6 appoggi.

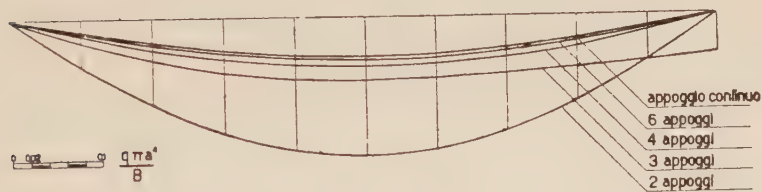


FIG. 7 — Diagramma degli abbassamenti w (metri) lungo un diametro per differenti condizioni di vincolo.

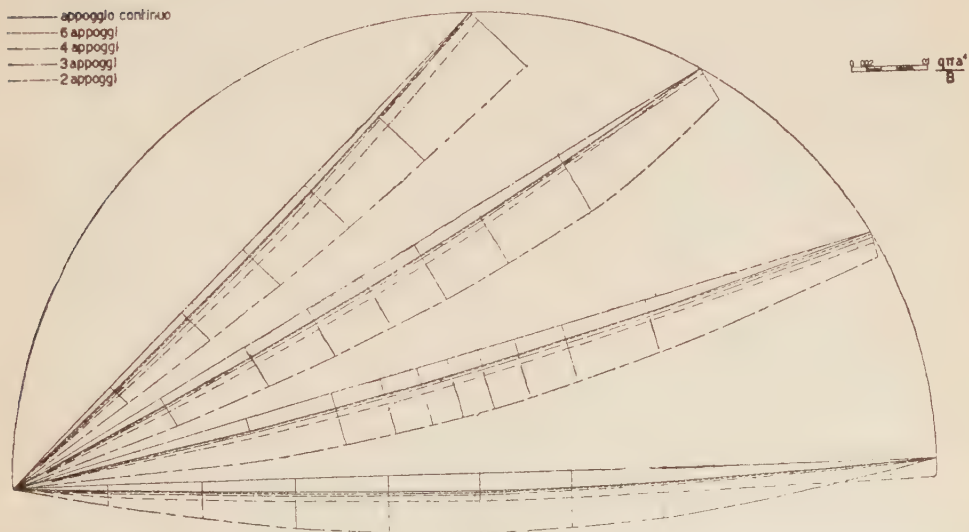


FIG. 7 bis. — Diagramma degli abbassamenti w (metri) per differenti condizioni di vincolo.

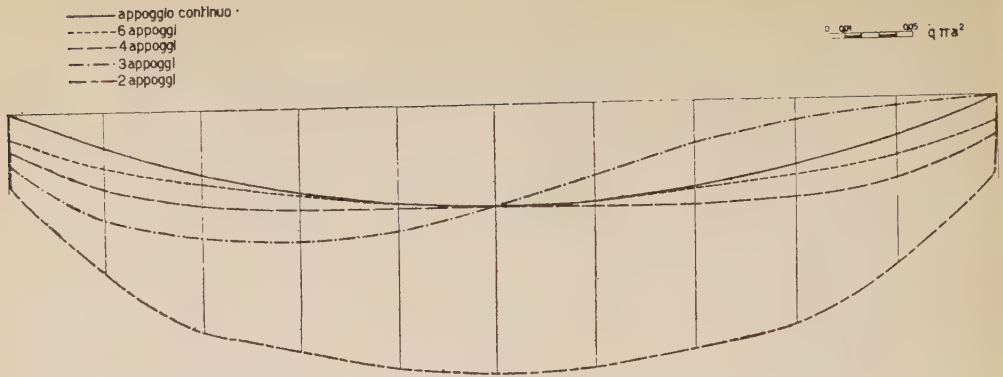


FIG. 8 — Diagramma dei momenti M_r (Kgm/m) per differenti condizioni di vincolo.

Nelle figure 7,8 sono riportati invece per raffronto l'andamento della deformata e del momento flettente radiale per la piastra su 2, 3, 4, 6 appoggi e su appoggio continuo.

Da tali raffronti si può notare come i valori della piastra su appoggio continuo sono molto prossimi a quelli della piastra su 6 appoggi, per cui il calcolo di quest'ultima ed a maggior ragione di quelle con un numero di appoggi maggiore di 6 si può senz'altro approssimare con quello delle piastre appoggiate su tutto il contorno.

BIBLIOGRAFIA

- K. GIRMANN - *Flächentragwerke*. Dritte Auflage, Wien.
 A. NADAI - *Z. Physik*, vol. 23.
 H. REISSNER - *Ingenieur Archiv.*, vol. 1.
 S. TIMOSHENKO - *Théorie des plaques et des coques*. Béranger, Paris.

DEFORMAZIONI E SOLLECITAZIONI IN UNA PIASTRA CIRCOLARE
SU DUE APPOGGI CARICATA AL CONTORNO

Tab. 1 Valori di $W'_2 D/Pa^2$

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0	0,05524	0,05524	0,05524	0,05524	0,05524	0,05524	0,05524
0,2	0,05296	0,05327	0,05411	0,05525	0,05637	0,05721	0,05750
0,4	0,04615	0,04760	0,05088	0,05541	0,05976	0,06288	0,06399
0,6	0,03492	0,03804	0,04600	0,05599	1,06526	0,07170	0,07398
0,8	0,01951	0,02564	0,04028	0,05726	0,07246	0,08282	0,08641
1	0	0,01131	0,03458	0,05908	0,08072	0,09526	0,10013

Tab. 2 Valori di M'_{r2}/P

θ	0°	30°	45°	60°	90°
0	0,10260	0,05130	0	— 0,05130	— 0,10260
0,2	0,10140	0,04730	— 0,00305	— 0,05020	— 0,09570
0,4	0,09750	0,03660	— 0,00980	— 0,04680	— 0,07680
0,6	0,09120	0,01850	— 0,01552	— 0,03710	— 0,05240
0,8	0,07860	0,00090	— 0,01294	— 0,02050	— 0,02590
1	0	0	0	0	0

Tab. 3 Valori di M'_{t2}/P

θ	0°	30°	45°	60°	90°
0	0,10260	— 0,05130	0	— 0,05130	— 0,10260
0,2	— 0,10600	— 0,04950	— 0,00316	— 0,05250	— 0,10010
0,4	— 0,11700	— 0,04480	— 0,01122	— 0,05640	— 0,09400
0,6	— 0,14180	— 0,03320	— 0,02238	— 0,05960	— 0,08690
0,8	— 0,19380	— 0,01550	— 0,03210	— 0,06030	— 0,08170
1	— ∞	0	— 0,03909	— 0,06200	— 0,07920

DEFORMAZIONI E SOLLECITAZIONI IN UNA PIASTRA CIRCOLARE
SU DUE APPOGGI CARICATA UNIFORMEMENTE

Tab. 4 Valori di $W_2 D / Pa^2$

$\theta \backslash \varrho$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0	0,07837	0,07837	0,07837	0,07837	0,07837	0,07837	0,07837
0,2	0,07497	0,07528	0,07612	0,07726	0,07738	0,07922	0,07951
0,4	0,06491	0,06636	0,06964	0,07417	0,07652	0,18164	0,08275
0,6	0,04858	0,05170	0,05966	0,06965	0,07892	0,08536	0,08764
0,8	0,02669	0,03282	0,04746	0,06444	0,07964	0,09000	0,09359
1	0	0,01131	0,03458	0,05908	0,08072	0,09526	0,10013

Tab. 5 Valori di M_{r_2} / P

$\theta \backslash \varrho$	0°	30°	45°	60°	90°
0	0,16430	0,11300	0,06170	0,01040	— 0,04090
0,2	0,16063	0,10653	0,05618	0,00903	— 0,03647
0,4	0,14933	0,08833	0,04203	0,00503	— 0,02497
0,6	0,13069	0,05799	0,02397	0,00239	— 0,01291
0,8	0,10081	0,02311	0,00927	0,00171	— 0,00369
1	0	0	0	0	0

Tab. 6 Valori di M_{t_2} / P

$\theta \backslash \varrho$	0°	30°	45°	60°	90°
0	— 0,04090	0,01040	0,06170	0,11300	0,16430
0,2	— 0,04512	0,01132	0,06404	0,11338	0,16098
0,4	— 0,05858	0,01362	0,06964	0,11482	0,15242
0,6	— 0,08748	0,02112	0,07670	0,11392	0,14122
0,8	— 0,14522	0,03308	0,08068	0,10888	0,13028
1	— ∞	5,04120	0,08029	0,10320	0,12040

DEFORMAZIONI E SOLLECITAZIONI IN UNA PIASTRA CIRCOLARE
SU DUE APPOGGI CARICATA AL CONTO RNO

Tab. 7 Valori di $W_3 D/Pa^2$

$\theta \backslash e$	0°	15°	30°	45°	60°
0	0,01311	0,01311	0,01311	0,01311	0,01311
0,2	0,01299	0,01303	0,01311	0,01319	0,01323
0,4	0,01214	0,01243	0,01312	0,01379	0,01406
0,6	0,00993	0,01101	0,01320	0,01521	0,01611
0,8	0,00606	0,00856	0,01351	0,01770	0,01928
1	0	0,00558	0,01417	0,02087	0,02345

Tab. 8 Valori di M'_{23}/P

$\theta \backslash e$	0°	30°	60°
0	0	0	0
0,2	0,01619	— 0,00042	— 0,01597
0,4	0,02964	— 0,00137	— 0,02684
0,6	0,03890	— 0,00516	— 0,02766
0,8	0,04245	— 0,00786	— 0,01755
1	0	0	0

Tab. 9 Valori di M'_{13}/P

$\theta \backslash e$	0°	30°	60°
0	0	0	0
0,2	— 0,01680	0,00044	0,01657
0,4	— 0,03460	0,00153	0,03150
0,6	— 0,05720	0,00685	0,04102
0,8	— 0,09643	0,01661	0,04868
1	∞	0,02609	0,05216

DEFORMAZIONI E SOLLECITAZIONI IN UNA PIASTRA CIRCOLARE
SU DUE APPOGGI CARICATA UNIFORMEMENTE

Tab. 10

Valori di $W_3 D/Pa^2$

θ q	0°	15°	30°	45°	60°
0	0,03624	0,03624	0,03624	0,03624	0,03624
0,2	0,03500	0,03504	0,03512	0,03520	0,03524
0,4	0,03090	0,03119	0,03188	0,03255	0,03282
0,6	0,02359	0,02467	0,02686	0,02887	0,02977
0,8	0,01324	0,01574	0,02069	0,02488	0,02646
1	0	0,00558	0,01417	0,02087	0,02345

Tab. 11

Valori di M_{r_3}/P

θ q	0°	30°	60°
0	0,06170	0,06170	0,06170
0,2	0,07544	0,05881	0,04326
0,4	0,08147	0,05046	0,02499
0,6	0,07839	0,03433	0,01183
0,8	0,06709	0,01435	0,00466
1	1	0	0

Tab. 12

Valori di M_{t_3}/P

θ q	0°	30°	60°
0	0,06170	0,06170	0,06170
0,2	0,04408	0,06132	0,07745
0,4	0,02382	0,05996	0,08992
0,6	0,00288	0,06117	0,09534
0,8	0,40785	0,06519	0,09726
1	∞	0,06729	0,09336

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE GIUDICATRICE
DEL CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO
PER GLI ANNI 1957-1958

La Commissione per il concorso al Premio biennale accademico per gli anni 1957-58, composta dai soci Prof. Francesco Giordani, Prof. Giovanni Malquori e Prof. Ugo Beretta, ha preso in esame la memoria presentata dall'unico concorrente, contrassegnata dal motto « *Altam supra volat ardea nubem* ».

La memoria tratta dall'influenza dei sostituenti sulla velocità delle reazioni chimiche.

L'A. suntegge l'abbondante letteratura esistente sull'argomento e segue l'evolversi nel tempo delle varie teorie che si sono succedute per tentare di dare un'interpretazione teorica del fenomeno.

Successivamente prende in esame la reazione tra anidride acetica ed alcoli diversi e, dopo averne descritto le caratteristiche cinetiche di reazione a decorso lento, illustra le ragioni che inducono a scegliere la reazione suddetta per studiare come la sostituzione di gruppi diversi nella molecola di uno dei reagenti si ripercuota sulla costante di velocità della reazione e sui valori dei termini E ed A per la formula di Arrhenius.

L'A. mette pure in evidenza l'estrema delicatezza dell'indagine che si propone di svolgere in quanto le variazioni che le grandezze in esame subiscono quando si osserva il comportamento cinetico di una serie omologa sono spesso tali da rientrare nei limiti di oscillazione consentiti alle grandezze stesse dagli errori che necessariamente ricorrono nelle misure.

Ravvisa quindi la necessità di affinare i metodi di ricerca, di depurare le costanti di velocità dall'influenza di fattori vari, quali per esempio la concentrazione dei reagenti o la variazione del mezzo solvente e di confrontare valori di k , E ed A ottenuti con metodo sistematico e rigoroso nelle stesse condizioni sperimentali.

L'A. espone quindi i risultati di tre serie di misure di cinetica, condotte alle temperature di 50°, 60° e 70° C per la reazione tra alcool metilico ed anidride acetica, solvente il tetracloruro di carbonio.

Il meccanismo cinetico della reazione si rivela analogo a quello della stessa reazione quando all'alcool metilico si sostituisce l'alcool etilico; il confronto delle costanti di velocità e dei termini E ed A per i due

alcooli conferma i risultati trovati da altri sperimentatori per sostituzione analoga.

Tutta la ricerca fatta apporta un contributo accurato e di notevole interesse allo studio della cinetica delle reazioni a decorso lento.

La Commissione unanime ritiene che il lavoro presentato sia ampiamente meritevole del premio accademico di lire 50.000.

La Commissione

FRANCESCO GIORDANI

GIOVANNI MALQUORI

UGO BERETTA

PROCESSI VERBALI DELLE TORNATE ACCADEMICHE DELL'ANNO 1958.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 gennaio 1958.

Assistono all'adunanza, presieduta dal vice-presidente Nobile, i soci ordinari residenti Colamonico, D'Erasmo (segretario), Imbò, Miranda, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Beretta, Cennamo, Colucci e Franciosi.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 dicembre 1957, che è approvato. Indi dà notizia delle principali deliberazioni prese dal Consiglio Generale della Società nell'adunanza del 28 dicembre scorso, preannunciando che la tornata plenaria prevista dall'art. 16 dello Statuto è stata fissata per il 26 gennaio.

Il socio Scherillo, anche a nome dei colleghi D'Erasmo e Imbò, legge la relazione sulla nota del dott. Renato Sinno, *Studio geologico e petrografico della zona Via Scalandrone -- Punta dell'Epitaffio (Lucrino)*, proponendone la inserzione nel Rendiconto. — La proposta è accolta all'unanimità dall'Accademia.

Il socio corrispondente Franciosi presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Osservazioni in tema di stati tensionali piani*.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1 febbraio 1958.

Sono presenti il presidente Giordani, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, Franchetta, Imbò, Miranda, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, ed i corrispondenti Franciosi ed Orrù.

Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 gennaio, che è approvato. Indi presenta l'Annuario 1958 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti aggiornato al 1° gennaio e in corso di distribuzione ai Soci. Comunica poscia il bando del Premio Internazionale di L. 1.000.000, con medaglia d'oro, istituito presso l'Accademia delle Scienze di Torino per onorare la memoria del prof. Modesto Panetti. Come risulta dalle norme del bando, detto premio sarà conferito ad uno scienziato che si sia particolarmente distinto per i suoi studi nel campo della meccanica applicata, pubblicati nel decennio 1948-1957; e l'Accademia è invitata a trasmettere, entro il 30 aprile 1958, proposte di nomi di persone che siano ritenute meritevoli di essere prese in considerazione.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalate le Commemorazioni di Giuseppe De Lorenzo e di Giuseppe Checchia Rispoli, offerte dal socio D'Erasmo.

Il socio Franciosi presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Renato Sparacio, dal titolo *Il cerchio di Mohr del tensore simmetrico del secondo ordine*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Miranda, Tolotti e Franciosi, perchè riferisca su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Spampinato presenta, per lo stesso periodico, una sua nota *Sulla rappresentazione finita di elementi differenziali dell' S_r complesso*.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1 marzo 1958.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, D'Erasmo, Giordani, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato, il socio ordinario non residente Signorini, ed i corrispondenti Franciosi ed Orrù.

Presiede il presidente Giordani, segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1° febbraio, che è approvato. Indi presenta il volume XXIV della serie 4^a del Rendiconto, di cui è stata recentemente ultimata la stampa, e comunica la Ministeriale 25 febbraio, relativa all'approvazione della nomina del prof. Vittorio Nobile a vice-presidente per il 1958. Partecipa, quindi, con profondo cordoglio, la scomparsa, avvenuta il 7 Febbraio in Roma, in età di novanta anni, del prof. Luigi Lombardi, che apparteneva alla Sezione di Scienze naturali, in qualità di socio corrispondente, dal 2 novembre 1912, e di socio ordinario non residente dal 3 giugno 1950. Ne ricorda brevemente gli insigni meriti di studioso, che dalla cattedra di elettrotecnica nobilmente tenuta nelle Università di Napoli e di Roma fu luminoso esempio di fervida attività didattica e scientifica e di costante attaccamento al dovere, e le rare doti di cittadino e di educatore, che hanno reso ancor più profondo ed unanime il generale rimpianto per la scomparsa di Lui. L'ufficio di Presidenza non ha mancato di esprimere alla famiglia le vive condoglianze dell'Accademia.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalate l'illustrazione dei *Foraminiferi padani*, offerta dall'AGIP Mineraria, la commemorazione di Giuseppe De Lorenzo inviata dalla prof. Regina Algranati, e una serie di note dell'Istituto per le applicazioni del calcolo, mandate dal consocio Picone.

Il socio Franciosi, anche a nome dei colleghi Miranda e Tolotti, legge il rapporto sulla nota del dott. Renato Sparacio dal titolo *Il cerchio di Mohr del tensore simmetrico del secondo ordine*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. - L'Accademia approva all'unanimità.

Il segretario presenta, da parte del socio corrispondente Stampacchia, una nota del dott. Emilio Gagliardo dal titolo: *Un'osservazione sul problema di Dirichlet per un'equazione lineare ellittica del secondo ordine*. — Il presidente incarica la Commissione costituita dai soci Miranda, Caccioppoli e Stampacchia di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio tesoriere Scherillo presenta il bilancio consuntivo dell'anno 1957. L'Accademia nomina revisori dei conti i soci Catalano e Salfi.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 aprile 1958.

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente Giordani, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Nobile, Scherillo ed i corrispondenti Beretta, Covello e Franciosi.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1° marzo, che è approvato. Indi comunica i ringraziamenti della famiglia Lombardi per le condoglianze espresse dall'Accademia in occasione della scomparsa del compianto consocio Luigi Lombardi. Legge poi i seguenti bandi di concorso: 1) al premio di L. 1.000.000, intitolato all'ing. Guido Ucelli per un'opera divulgativa di Storia della scienza e della Tecnica, originale ed inedita, con scadenza al 15 febbraio 1960; 2) al premio triennale per la Fisica « Francesco Somaini » per il 1958, di L. 1.500.000, e alla « Borsa Francesco Somaini per lo Studio della Fisica » per il 1958, di lire 750.000, entrambi con scadenza 1° luglio 1958; 3) a tre premi di Studio «dott. Alessandro Bonavera », di L. 500.000 ciascuno, banditi dall'Accademia delle Scienze di Torino, con scadenza 31 maggio 1958 e destinati agli autori dei migliori lavori in Matematiche pure e in Elettrotecnica.

Richiamandosi all'invito dell'Accademia delle Scienze di Torino — già comunicato nell'adunanza del 1° febbraio scorso — di trasmettere, entro il 30 aprile corrente, proposte di nomi di persone che siano ritenute meritevoli di essere prese in considerazione per l'assegnazione del Premio Internazionale Modesto Panetti di L. 1.000.000 nel campo della Meccanica applicata, il Presidente segnala (e l'Accademia unanime approva) il no-

me di Luigi Crocco che ha acquistato particolari benemerienze con le sue importanti ricerche sui problemi di fluidodinamica.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio alcune sue recenti pubblicazioni, riguardanti alcuni *Aspetti geologici e geografici del Salento*, i discorsi tenuti in occasione del XVII Congresso Geografico Italiano in Bari, e lo stato dei lavori della grande Carta della utilizzazione del suolo per le regioni meridionali d'Italia. - Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia il donatore.

La Commissione Miranda, Caccioppoli e Stampacchia si dichiara unanime nel proporre la inserzione nel Rendiconto della nota del dott. Emilio Gagliardo dal titolo *Un'osservazione sul problema di Dirichlet per un'equazione lineare ellittica del secondo ordine*. - L'Accademia approva.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Scorza Dragoni, una nota del dott. Giovanni Zacher, dal titolo *Un'osservazione sui gruppi finiti p-risolubili*. — Il presidente incarica la Commissione costituita dai soci Nobile, Spampinato e Miranda di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio corrispondente Covello presenta, per il Rendiconto, un lavoro suo e del dott. Gaetano Pepe, dal titolo *Gli esteri alifatici dell'acido 5-iodosalicilico in relazione alla loro attività antimicrobica e batteriostatica*.

Il segretario ricorda che il 3 maggio, giorno fissato dal calendario accademico per la prossima tornata ordinaria, alle ore 10.30 saranno convocate separatamente le due Sezioni di Scienze Naturali e di Scienze Matematiche per accordarsi sui nomi dei candidati da proporre, nella successiva adunanza di giugno, ai posti di socio vacanti nelle diverse categorie.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 maggio 1958.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Catalano, Colamonico, D'Erasmo, Franchetta, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato ed il corrispondente Orrù.

Presiede il vice-presidente Nobile, segretario il socio D'Erasmo.

Il presidente Giordani, all'estero per motivi di ufficio, scusa la sua assenza.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 5 aprile, che è approvato.

Il socio Colamonico, nell'offrire i quattro volumi degli Atti del XVII Congresso Geografico Italiano, tenuto in Bari sotto la sua presidenza nell'aprile del 1957, si ferma a mettere in rilievo principalmente l'importanza di alcune relazioni su temi di geografia fisica e di climatologia esposte in quella circostanza (studi sul carsismo e sul clima in Italia).

Il socio D'Erasmo presenta ed offre in omaggio alcune sue recenti pubblicazioni, fra cui un opuscolo dal titolo *La Vulcanologia nell'opera di Giuseppe De Lorenzo*, e un volume della collana *Bibliografia geologica d'Italia* relativo alla Campania, edito sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia i donatori.

Il socio Miranda, anche a nome dei colleghi Nobile e Spampinato, legge la relazione sulla nota del dott. Giovanni Zacher, dal titolo *Un'osservazione sui gruppi finiti p-risolubili*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. - L'Accademia approva all'unanimità.

Il socio Scherillo presenta, per gli Atti, una sua memoria dal titolo *Stratigrafia della pianura campana*, accompagnata da una carta, da figure schematiche nel testo e da tavole illustrative. — Con voto unanime l'Accademia ne approva la stampa nel volume in corso degli Atti, assumendo a proprio carico la spesa per il testo e le illustrazioni.

Il socio Miranda presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Carlo Ciliberto riguardante *Alcune osservazioni sui problemi di Meyer-Lagrange per gli integrali sem-*

plici in forma ordinaria. — Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Miranda, Spampinato e Franchetta con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Salfi, anche a nome del collega Catalano, legge la relazione dei revisori dei conti sul bilancio consuntivo dell'anno 1957, la quale conclude con la proposta di approvazione, insieme con un voto di plauso per l'opera del Tesoriere Scherillo.

Messe ai voti le conclusioni della relazione, sono approvate all'unanimità dall'Accademia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 giugno 1958.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, D'Erasmo, Diamare, Franchetta, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato, Tolotti, il socio ordinario non residente Armellini ed i soci corrispondenti Covello e Galgano.

Presiede il presidente Giordani, segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 maggio, che è approvato. Indi comunica i programmi dei concorsi a premio proposti dall'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, che si riferiscono a temi di scienze matematiche, fisiche e naturali.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio il segretario segnala il volume di *Bibliografia marconiana* offerto dal prof. Giordani, presidente del Cons. Naz. Ricerch, il vol. X, n.s., di *Delpinoa*, inviato dal socio Catalano, e il vol. IX dell'*Annuario dell'Istituto e Museo Zoologico dell'Università di Napoli*, mandato dal consocio Salfi. — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia i donatori.

La Commissione Miranda, Spampinato e Franchetta riferisce sulla nota del prof. Carlo Ciliberto dal titolo *Alcune osservazioni sui problemi di Meyer-Lagrange per gli integrali semplici in forma ordinaria*, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia unanime approva.

Il segretario presenta, da parte del socio Malquori che scusa l'assenza, una nota del prof. Riccardo Sersale dal titolo *Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano*. — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Malquori, Scherillo e D'Erasmo con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima tornata.

Il socio Scherillo presenta una nota del prof. Antonio Parascandola dal titolo *Cristalli di salgemma con sfaldatura rombododecaedrica*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Scherillo, Giordani e D'Erasmo.

Il socio Miranda presenta una nota del signor C. Corduneanu *Sopra i problemi ai limiti per alcuni sistemi di equazioni differenziali non lineari*. Il Presidente dà incarico alla Commissione Miranda, Nobile e Spampinato di riferire su di essa nella successiva adunanza.

Constatata la validità dell'adunanza, a norma dell'art. 12 dello Statuto sociale, si passa quindi, secondo l'ordine del giorno, alla elezione dei soci per i posti vacanti nelle diverse categorie.

Il Segretario comunica che nell'adunanza di sezione del 3 maggio scorso, quella di Scienze Naturali decise di non procedere, per ora, ad alcuna proposta di nomina di candidati al posto di socio ordinario residente e di presentare, invece, all'approvazione della Classe un candidato per la nomina al posto vacante di socio ordinario non residente e tre candidati per la nomina ai tre posti vacanti di socio corrispondente.

Su invito del Presidente, il socio Scherillo legge la relazione sui requisiti scientifici del prof. Ettore Onorato, ordinario di Mineralogia nell'Università di Roma, proposto a voti unanimi dalla Sezione per la nomina a socio ordinario non residente. Quindi il Presidente chiede ai soci ordinari presenti all'adunanza se abbiano da proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, il candidato è ammesso alla votazione per

scrutinio segreto. Il risultato di questa è stato di 14 voti favorevoli sopra 14 soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletto socio ordinario non residente nella Sezione di Scienze naturali il prof. Ettore Onorato, avvertendo che, a norma dell'art. 15 dello Statuto, l'elezione sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Successivamente i soci G. D'Erasmo, U. Pierantoni e F. Giordani leggono rispettivamente il parere motivato sui requisiti dei professori Francesco Penta, ordinario di geologia applicata nell'Università di Roma, Baldassarre De Lerna, ordinario di zoologia nell'Università di Bari, e Rodolfo Nicolaus, straordinario di chimica organica nell'Università di Napoli, proposti all'unanimità dalla Sezione di Scienze Naturali per la nomina a socio corrispondente. Non avendo alcuno dei presenti chiesto, su domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, i tre candidati predetti sono ammessi alla votazione per scrutinio segreto. La votazione ha dato, per ciascuno dei tre candidati predetti, quattordici voti favorevoli sopra quattordici soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama eletti, ad unanimità, i professori Francesco Penta, Baldassarre De Lerna e Rodolfo Nicolaus soci corrispondenti nella Sezione di Scienze naturali.

Quindi il Segretario legge le proposte avanzate dalla Sezione di Scienze matematiche, la quale nella propria adunanza del dì 3 magg'io 1958 stabilì di presentare all'approvazione della Classe un candidato per il posto vacante di socio ordinario residente e tre candidati per i posti di socio corrispondente.

Il presidente invita il socio Miranda a leggere la relazione sui requisiti scientifici del prof. Vincenzo Franciosi, ordinario di Scienza delle costruzioni nella Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli, proposto dalla Sezione a voti unanimi per la elezione a socio ordinario residente, e chiede ai soci ordinari se abbiano eventualmente da aggiungere altri nomi. In mancanza di ulteriori proposte, il nome dell'unico candidato è votato a scrutinio segreto, ottenendo quattordici voti favorevoli su quattordici soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama, in conseguenza, il prof. Vincenzo Franciosi socio ordinario residente nella Sezione delle Scienze Matematiche, subordinatamente all'approvazione del Capo dello Stato prescritta dall'art. 15 dello Statuto sociale.

Si passa infine alla lettura — fatta dai soci Nobile e Miranda — delle relazioni sui nomi dei professori Tito Nicolini, straordinario di Astronomia nell'Università di Napoli, Elio Giangreco, ordinario di Costruzioni in legno, ferro e cemento armato nell'Università di Napoli, e Donato Greco, straordinario di Analisi matematica presso l'Università di Bari, proposti all'unanimità dalla Sezione quali candidati ai tre posti vacanti di socio corrispondente. Il presidente domanda ai soci ordinari se abbiano eventualmente da integrare la lista con altri nomi, e, in mancanza di altre proposte, indice la votazione a scrutinio segreto per i tre candidati predetti, ciascuno dei quali ottiene quattordici voti favorevoli sopra quattordici soci ordinari presenti e votanti.

I professori Tito Nicolini, Elio Giangreco e Donato Greco vengono pertanto proclamati soci corrispondenti dell'Accademia nella Sezione delle Scienze Matematiche.

Si autorizza il Segretario ad accettare con le limitazioni in vigore, durante il periodo delle ferie estive, le note dei soci di ogni categoria, che saranno eventualmente presentate per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell'adunanza del dì 15 novembre 1958.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Carrelli, Catalano, Colamonicò, D'Erasmo, Franciosi, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti ed i corrispondenti Colucci, Galgano, Giangreco, Nicolaus, Nicolini e Orrù.

Presiede il vice-presidente Nobile, segretario il socio D'Erasmo. Scusano l'assenza il presidente Giordani e il socio corrispondente Penta.

Espresso il saluto di benvenuto ai nuovi soci che per la prima volta assistono all'adunanza, il segretario comunica che il presidente Giordani, assente per motivi di salute, è in avanzata convalescenza e si dice sicuro interprete dei sentimenti unanimi dell'Accademia proponendo l'invio di un telegramma di auguri all'eminente Collega. — L'Accademia si associa.

Ricorda quindi, con profonda commozione, che nell'ultima adunanza tenuta prima delle ferie estive era presente, tra gli altri colleghi, il socio ordinario non residente Giuseppe Armellini, che un crudele destino doveva tragicamente ed improvvisamente far scomparire, nel successivo mese di luglio, per il dolore causatogli da un incendio sviluppatosi di notte nella cupola del suo Osservatorio Astronomico di Monte Mario. Reputa superfluo rammentare ai consoci, che per più di un trentennio lo ebbero carissimo, le nobili doti dell'animo e gli insigni meriti dello Scienziato, che per oltre un cinquantennio coltivò con poderosa inesaurita attività tutti i rami dell'Astronomia; e mentre comunica che dell'insigne studioso sarà tenuta, in altra adunanza, degna commemorazione, partecipa i ringraziamenti della famiglia per il cordoglio a suo tempo espresso dal Sodalizio. Su proposta del Presidente si decide l'invio di un telegramma di condoglianze alla vedova, in occasione della ripresa dei lavori accademici.

Il Segretario comunica inoltre:

1) i ringraziamenti del socio Carrelli per i sentimenti di condoglianza manifestati dall'Accademia nella circostanza del grave lutto familiare che lo colpì nello scorso settembre;

2) la Ministeriale 22 luglio, relativa all'avvenuta approvazione della nomina del prof. Vincenzo Franciosi a socio nazionale ordinario residente e del prof. Ettore Onorato a socio nazionale ordinario non residente;

3) le lettere dei prof. Onorato, Franciosi, Penta, De Lerma, N'colaus, Nicolini, Giangreco e Greco, che ringraziano l'Accademia, la quale con le votazioni dello scorso Giugno si piacque accoglierli nel proprio seno;

4) l'inserzione nel Rendiconto accademico in corso di stampa delle seguenti note pervenute in Segreteria durante il periodo delle ferie estive da parte del socio A. Orrù: a) Antonietta Orrù, Franco Badolato e Angela Quagliariello, *Variazioni della concentrazione degli acidi ascorbico e deidroascorbico durante la germinazione dei semi di Phaseolus vulgaris*; b) Antonietta Orrù, Franco Badolato e Teodoro De Leo, *Sulla concentrazione degli acidi ascorbico e deidroascorbico in poltiglie di semi di Phaseolus vulgaris poste ad incubare; influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta*.

L'Accademia prende atto di tutte le precedenti comunicazioni.

Il Segretario quindi informa che al concorso al premio biennale accademico per gli anni 1957-1958, scaduto il 31 ottobre scorso, sul tema *Studi e ricerche sulla cinetica chimica*, ha partecipato in tempo utile un solo concorrente presentando un plico suggellato contrassegnato dal motto *Altam supra volat ardea nubem*. — Il Presidente nomina la Commissione Giordani, Malquori e Beretta, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati molteplici lavori dell'Istituto per le applicazioni del calcolo, inviati dal socio Picone, e l'*Indice analitico della Bibliografia geologica della Campania*, offerto dal consocio D'Erasmo.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio alcune sue recenti pubblicazioni di geografia economica, antropogeografia e cartografia, nonchè i tre fogli della *Carta della utilizzazione del suolo* riguardanti la Sicilia, e ne discorre. — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia i donatori.

Si stabilisce quindi il calendario delle adunanze ordinarie dell'anno 1959, che ri-

sulta il seguente: Gennaio 3, Febbraio 7, Marzo 7, Aprile 4, Maggio 2, Giugno 6, Novembre 7, Dicembre 4.

La Commissione Malquori, Scherillo e D'Erasmo riferisce sulla nota del prof. Riccardo Sersale dal titolo *Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano*, proponendone a voti unanimi l'accoglimento nel Rendiconto. Di uguale parere è la Commissione Scherillo, Giordani e D'Erasmo nei riguardi della nota del prof. Antonio Parascandola, riguardante *Cristalli di salgemma con sfaldatura rombododecaedrica*. Analogamente il socio Nobile propone, tanto in nome suo che dei colleghi Miranda e Spampinato, di inserire nel medesimo periodico la nota del signor C. Corduneanu, *Sopra i problemi ai limiti per alcuni sistemi di equazioni differenziali non lineari*.

Con votazione unanime l'Accademia approva la stampa delle tre note predette nel proprio Rendiconto.

Il socio Franciosi presenta una nota dell'ing. Eugenio Bruzzese dal titolo *Il problema delle distorsioni nel calcolo a rottura*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Franciosi, Miranda e Giangreco con l'incarico di riferire nella prossima adunanza.

Il socio Orrù presenta due note dei dottori Teodoro De Leo e Lidia Foti: la prima dal titolo *Le attività α - e β -amilolitiche dei semi di *Canavalia ensiformis**, e la seconda sopra *La ripartizione delle attività amilolitiche tra le varie parti del seme e della plantula di *Canavalia ensiformis* durante la germinazione*. Il presidente incarica i soci Orrù, Salfi e Catalano di riferire, nella ventura tornata, su entrambi i lavori.

Il socio Nicolaus presenta due note: una sua e dei dottori Achille Vitale e Mario Piattelli, dal titolo *Acido 2, 3, 4, 5 - pirroltetracarbonico nell'ossidazione della melanina di Seppia*; l'altra, della dott. Rachele Scarpati, sopra *L'azione del fenilisocianato sul fenilchetene-dimetilacetale e sul chetene-dietilacetale*. Per quest'ultima è incaricata di riferire, nella prossima riunione, la Commissione Nicolaus, Bakunin e Beretta.

Il socio Tolotti presenta, pure per il Rendiconto, una nota del dott. Salvatore Rionero, dal titolo *Un ulteriore caso di non validità del principio dell'effetto giroscopico*. Il presidente dà incarico ai soci Tolotti, Miranda e Franciosi di riferire su tale nota nella tornata di dicembre.

Constatata la validità dell'adunanza, secondo le norme sancite dall'art. 12 dello Statuto per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l'ordine del giorno, alla elezione del Vice-presidente per l'anno 1959.

Il segretario ricorda gli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tale votazione e distribuisce le schede agli aventi diritto. La votazione, fatta a scrutinio segreto, dà il seguente risultato:

Soci ordinari presenti e votanti, 13:

Salfi Mario, voti 12,

Scherillo Antonio, voti 1.

Con le medesime norme si procede quindi alla votazione alla carica di Segretario per il triennio 1959-1961, con il risultato appresso indicato:

D'Erasmo Geremia, voti 12,

Imbò Giuseppe, voti 1.

Il presidente proclama eletto il socio Mario Salfi vice-presidente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1959, e segretario della stessa per il triennio 1959-1961 il socio Geremia D'Erasmo, avvertendo che a norma dell'art. 15 dello Statuto entrambe le nomine saranno comunicate al Ministero della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 dicembre 1958.

Sono presenti i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, D'Erasmus, Franciosi, Imbò, Nobile, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti ed i corrispondenti Cennamo, Colucci, Giangreco, Nicolaus, Nicolini, Orrù e Penta.

Presiede il vice-presidente Nobile, segretario il socio D'Erasmus.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 15 novembre, che è approvato.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori edito dall'Istituto per le applicazioni del Calcolo ed inviato dal consocio Picone.

Il socio Colamonico offre il vol. XVIII delle *Memorie di Geografia Economica*, relativo alle *Saline della Sicilia* illustrate dal prof. D. Ruocco, e ne discorre. — Il presidente ringrazia i donatori.

Su proposta delle rispettive Commissioni — nominate nella precedente adunanza del novembre — l'Accademia approva all'unanimità, con separate votazioni, l'inserzione nel Rendiconto delle cinque note seguenti:

1) Bruzzese Eugenio, *Il problema delle distorsioni nel calcolo a rottura* (presentata dal socio Franciosi);

2) Teodoro De Leo e Lidia Foti, *Le attività α - e β -amilolitiche dei semi di *Canavalia ensiformis** (presentata dal socio Orrù);

3) Teodoro De Leo e Lidia Foti, *La ripartizione delle attività amilolitiche tra le varie parti del seme e della plantula di *Canavalia ensiformis* durante la germinazione* (presentata dal socio Orrù);

4) Rachele Scarpati, *Azione del fenilisocianato sul fenilchetene — dimetilacetale e sul chetene — dietilacetale* (presentata dal socio Nicolaus);

5) Salvatore Rionero, *Un ulteriore caso di non validità del principio dell'effetto giroscopico* (presentata dal socio Tolotti).

L'Accademia fissa quindi le norme per il nuovo concorso al premio biennale accademico di L. 50.000 per il 1959-60, stabilendo come data di scadenza il 31 ottobre 1960 e come tema il seguente: « *Ricerche sulle anomalie delle strutture cristalline mediante i raggi X* ».

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sull'invariante di Zeuthen-Segre e sulla differenza fra la classe e l'ordine di una superficie algebrica*.

Il socio corrispondente Giangreco presenta, per lo stesso periodico, una sua nota dal titolo *Le piastre circolari appoggiate in più punti del loro contorno*.

Il socio Franciosi presenta una nota dell'in. Tullio Renzulli sopra *Il problema dell'equilibrio elastico in presenza di attrito nei vincoli*. — Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Franciosi, Tolotti e Giangreco, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Infine l'Accademia discute sulla opportunità di corredare tutti i lavori che verranno pubblicati nei propri Rendiconti ed Atti di un breve sunto in lingua inglese, opportunità che viene giudicata utile dalla maggior parte dei presenti. Essendo il Rendiconto del 1958 già quasi tutto stampato, si stabilisce di rimandare la discussione sull'argomento alla prossima adunanza, nella quale verranno fissate le modalità della innovazione.

INDICE

G. D'ERASMO — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1957	pag. 3
V. FRANCIOSI — Osservazioni in tema di stati tensionali piani	» 9
N. SPAMPINATO — Sulla rappresentazione finita di elementi differenziali dell' S_r complesso.	» 16
R. SPARACIO — Il cerchio di Mohr del tensore simmetrico del 2° ordine	» 31
G. ZACHER — Un'osservazione sui gruppi finiti p -risolubili	» 46
C. CILIBERTO — Alcune osservazioni sui problemi di Mayer-Lagrange per gli integrali semplici in forma ordinaria	» 49
E. GALLIARDO — Un'osservazione sul problema di Dirichlet per un'equazione lineare ellittica del secondo ordine	» 66
M. COVELLO e G. PEPE — Gli esteri alifatici dell'acido 5-iodosalicilico in rela- zione alla loro attività antimicrobica e batteriostatica	» 81
A. PARASCANDOLA — Cristalli di salgemma con sfaldatura rombododecae- drica (con una tavola)	» 96
C. CORDUNEANU — Sopra i problemi ai limiti per alcuni sistemi di equazioni differenziali non lineari.	» 98
A. ORRÙ, F. BADOLATO e A. QUAGLIARIELLO — Variazione della concentrazione degli acidi ascorbico e deidroascorbico durante la germinazione dei semi di <i>Phaseolus vulgaris</i>	» 107
T. DE LEO e L. FOTI — Le attività α - e β -amilolitiche dei semi di <i>Canavalia en-</i> <i>siformis</i>	» 120
T. DE LEO e L. FOTI — La ripartizione delle attività amilolitiche tra le varie parti del seme e della plantula di <i>Canavalia ensiformis</i> durante la germina- zione.	» 137
E. BRUZZESE — Il problema delle distorsioni nel calcolo a rottura	» 150
A. ORRÙ, F. BADOLATO e T. DE LEO — Sulla concentrazione degli acidi ascor- bico e deidroascorbico in poltiglie di semi di <i>Phaseolus vulgaris</i> poste ad incubare; Influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piu- metta.	» 159
S. RIGNERO — Un ulteriore caso di non validità del principio dell'effetto giro- scopico	» 173
R. SERSALE — Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano (con cinque tavole)	» 181
N. SPAMPINATO — Sull'invariante di Zeuthen-Segre e sulla differenza fra la clas- se e l'ordine di una superficie algebrica	» 208

R. A. NICOLAUS, A. VITALE e M. PIATTELLI — Acido 2,3,4,5-pirroltetra carbonico nell'ossidazione della melanina di Seppia	pag. 220
R. SCARPATI — Reazione dei cheteni. Nota III. Azione del fenilisocianato sul fenilchetene-dimetilacetale e sul chetene-dietilacetale	» 223
T. RENZULLI — Il problema dell'equilibrio elastico in presenza di attrito nei vincoli	» 230
Concorso al premio biennale accademico dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche per gli anni 1959-1960	» 242
E. GIANGRECO — Le piastre circolari appoggiate in più punti del loro contorno. Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio biennale accademico per gli anni 1957-1958	» 243
Processi verbali delle tornate accademiche dell'anno 1958	» 259
Indice	» 261
	» 269

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI

(Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 10186 del dì 14 agosto 1954)

Finito di stampare il 28 febbraio 1959

